بيتر إم هيجنز

الرياضيات للفضوليين



ترجمة انتصارات محمد حسن الشبكي

الرياضيات للفضوليين

تأليف
بيتر إم هيجنز

ترجمة
انتصارات محمد حسن الشبكي

مراجعة
بيومي إبراهيم بيومي
هبة عبد العزيز غانم



الرياضيات للفضوليين

بيتر إم هيجنز

Mathematics for the Curious

Peter M. Higgins

الناشر مؤسسة هنداوي
المشهرة برقم ١٠٥٨٥٩٧٠ بتاريخ ٢٦ / ١ / ٢٠١٧

يورك هاوس، شييت ستريت، وندسور، SL4 1DD، المملكة المتحدة
تليفون: ‎+ ٤٤ (٠) ١٧٥٣ ٨٣٢٥٢٢
البريد الإلكتروني: hindawi@hindawi.org
الموقع الإلكتروني: https://www.hindawi.org

تصميم الغلاف: إيهاب سالم

الترقيم الدولي: ٩٧٨ ١ ٥٢٧٣ ٠٠١٦ ٣

صدر الكتاب الأصلي باللغة الإنجليزية عام ١٩٩٨.
صدرت هذه الترجمة عن مؤسسة هنداوي عام ٢٠٠٩.

المحتويات

تمهيد

إن غرض هذا الكتاب هو الاستمتاع؛ ومن ثم فلكَ — عزيزي القارئ — أن تتصفَّحه بادئًا بأي موضوع يروق لك. وسوف ترِد من حينٍ لآخرَ إشاراتٌ لأشياءَ سابقة، لكن لن يفوتك الكثير إذا تجاهلتها وتابعت القراءة. ومع ذلك، فأنت قد تجد نفس القدر من المتعة إذا تصفَّحت موضوعات الكتاب مرتبةً أو غيرَ مرتبة. وفي حين أن هذا ربما يفتقر إلى النظام، فإنه نهجُ معظم دارسي الرياضيات.

أود أن أشكر كلَّ من ساهم بقراءة مُسوَّدات الكتاب، سواء من العاملين أو القرَّاء الذين لم تُذكر أسماؤهم بمطبعة جامعة أكسفورد، وأشكر جنيفيف هيجنز والدكتور تيم ليفرز لمراجعتهم وملحوظاتهم القيمة.

بيتر إم هيجنز
كولشيستر، يوليو ١٩٩٧

الفصل الأول

عشرة أسئلة وإجاباتها

كثير من الأشياء في العالم لها جانب رياضي، ووظيفة الرياضيات هي محاولة فَهْم هذا الجانب من طبيعة الأشياء. والمنطق الرياضي غالبًا ما يفسر الأشياء التي لولاه لَظلَّت غامضةً أو محيرة، وأحيانًا يكون هذا المنطق من السهل فهمه عندما يُقدَّم إليك.

يتكون هذا الفصل التمهيدي من مجموعة من الأمثلة بهدف إثبات ذلك. فإذا شعرتم أنكم أكثر فَهمًا بعد تصفُّحها فأدعوكم إلى متابعة القراءة. إن هذا الكتاب لا يسعى إلى التعمق في الرياضيات، ولكني آمل من خلاله أن أنقل إليكم نكهة الرياضيات الحديثة. كما يمكن استخدامه لتوضيح بعض جوانب الجبر والهندسة المدرسية، وحتى الحساب الذي ربما كنتَ دائم القلق من صعوبته إلى حدٍّ ما. على سبيل المثال، من الممكن جدًّا أن يفهم أيُّ شخص نظريةَ فيثاغورث كما يفهمها عالم الرياضيات المتخصص؛ فمستوى الصعوبة التي يصادفها تشبه صعوبة تجميع قطع مبعثرة لتشكيل صورة مكونة من ست قطع. وليس هناك سبب يدعو إلى أن تظل مثل هذه الجوانب المهمة الشائقة من الرياضيات غامضةً؛ فمعظم المفكرين من الناس يُمكِنهم فهمُ هذه الأشياء بقليلٍ من الصبر فهمًا تامًّا. بل إن بعض الجوانب العميقة لرياضيات القرن العشرين يمكن فهمها، وآمُل أن أعطيَ القارئ الإشباع الناجم عن رؤية بعض أجزاء من عالم الرياضيات لم تُكتشف حتى للنوابغ في الماضي.

في المدرسة وكذلك في الجامعة تكون غاية الطلاب هي الحصول على درجات مُرْضية في الامتحانات، ويساعدهم المدرسون في تحقيق هذه الغاية؛ ومن ثم لا يوجد لديهم وقت للإعجاب بالمشهد الرياضي. إلا أن هذه ليست حالتنا. فالقارئ هنا لا يُرضي أحدًا سوى نفسه. ولسنا في عجَلةٍ مِن أمرنا، كما أننا لا نخشى حُكمًا صادرًا على نتائجنا. تمهل في التفكير فيما يُطرح عليك. الورقة والقلم قد يساعدان أحيانًا، فلا تمنع نفسك من الرسم

والتخطيط. وعلى الرغم من أن هذه الخطوط قد تبدو طفوليةً وغيرَ مُجدية، فإنها تساعد حقًّا في عملية التفكير ولا ينبغي أبدًا التقليلُ من أهميتها.

(١) كم عدد المباريات التي تُلعب في بطولة للتنس؟

هذا سؤال عملي من المؤكد أن منظمي البطولة يحتاجون إلى معرفة جوابه. لنأخذ البطولة الكبرى (جراند سلام) مثالًا، حيث يوجد 128 مشتركًا. ويتكون كل دور من تجميع أزواج من اللاعبين المتبقين من الدور السابق له. ثم يلعب كلُّ لاعبٍ مع منافسه بعد قرعة. ويخرج الخاسرون من البطولة ويصعد الفائزون إلى الدور التالي حتى يُتوَّج البطل.

هذه المسألة ليست صعبةً في حلها. من الواضح أن هناك $128 \div 2 = 64$ في الدَّور الأول ويصعد 64 لاعبًا للتنافس في الدور الثاني. ومن ثم يتطلب الدور الذي يليه $64 \div 2 = 32$ مباراة، وهكذا. فالعدد الكلي للمباريات في هذه البطولة يصبح:

$$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127.$$

المشكلة قد حُلت، ولكن يبدو أن هناك بذورًا لشيءٍ مهم في الإجابة نفسها؛ 127، وهو عدد يقل بمقدار واحد عن العدد الإجمالي للاعبين. فماذا يحدث إذن؟

يجب ملاحظة أن عدد المشتركين (128) يثير الفضول في حد ذاته. فالمنظمون اختاروا بفطنة عددًا هو في الحقيقة قوة للعدد 2؛ إذ إن $2^7 = 128$ أي $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$. وذلك يؤدي إلى التأكد من صعود عدد زوجي من اللاعبين عند نهاية كل دور، بحيث يَسهُل تقسيمُهم في الدور الذي يليه إلى أزواج (إلا في الدور النهائي، حيث يبقى لاعب واحد لم يُهزم). فالشخص الذي ينعم بمعرفة ما يُسمى بالمتسلسلة الهندسية يُمكِنه الآن فهمُ المقصود بكل ذلك، وأننا فقط نختبر صحة: $2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 = 2^7 - 1$، وهي مجرد حالة خاصة من صيغة مجموعات القوى للعدد 2، أنه لأي عدد صحيح n،

$$2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

أسارع بالتأكيد على أن هذه ملاحظة فنية بعيدة عن الموضوع. أي موضوع؟ حتى ترى ما أحاول توضيحه دعنا نُغير المثال قليلًا. لنفترض أننا سمحنا باشتراك 100 لاعب بدلًا من 128 في هذه البطولة. هذا قد يحدث في بطولة للهواة حيث نسمح لكل من يرغب في اللعب

بدخول المسابقة. واضح أن هناك 50 مباراة في الدور الأول و25 مباراة في الثاني؛ لكن بعد ذلك أصبح لدينا عدد فردي من اللاعبين (25). للتعامل مع هذا الوضع، علينا أن نختار أحد اللاعبين عشوائيًّا ليصعد مباشرة إلى الدور التالي بدون أن يلعب. ومن ثم يكون هناك 13 لاعبًا بعد الدور الثالث (12 لاعبًا فائزًا من الدور الثالث مع لاعب صَعِد مباشرة دون أن يلعب). وبالتفكير قليلًا نجد أن العدد الإجمالي للاعبين عند بداية كل دور يكون طبقًا للتسلسل 100، 50، 25، 13، 7، 4، 2، ويكون إجمالي المباريات في هذه البطولة هو:

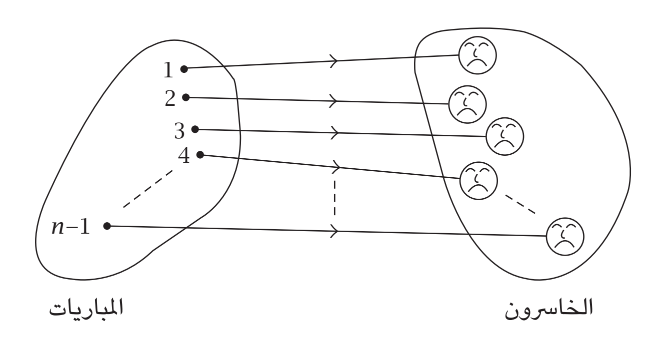
$$50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 2 + 1 = 99.$$

مرة أخرى حصلنا على الإجابة بالرغم من الوصول إلى الجواب الأخير بطريقة صعبة قليلًا. فإذا كررنا الحسابات لأعداد مختلفة من المشتركين فإنك ستجد أنه إذا بدأت بعدد n من اللاعبين، فإن عدد المباريات سيكون دائمًا $n - 1$. أعتقد أنه يجب أن يكون هناك سبب لذلك، أو برهان إذا شئت. هناك برهان يعتمد على القسمة على 2 ثم تَكرار الجمع عددًا معينًا من المرات، ويبدو أنه ممتلئ بالصعوبات. فأنت مُعرَّض للوصول إلى أعداد فردية من اللاعبين المتبقين من حين لآخر بشكل غير منتظم، كما حدث معنا، ويبدو أنه من الصعب وصف العملية كلها بشكل عام بطريقة دقيقة للوصول إلى النتيجة المطلوبة مع أنها أفكار بسيطة.

هذا النوع من الأشياء يحدث كثيرًا لعلماء الرياضيات. فهم يشعرون بالثقة في افتراض معين، ويبدو للوهلة الأولى أن هناك طريقةً مباشرة لإثباته، لكنهم يصادفون صعوبات في إتمام برهانهم. خط معالجة المشكلة يضعك أمام كثير من المساومات ويجعلك مجبرًا على أن تتعامل مع جوانبَ أخرى لم تكن مهتمًّا بها من قبل. يحدث كثيرًا كما في حالتنا تلك أننا لا نستطيع أن نرى الأشياء المُهمَّة لتركيزنا على التفاصيل الصغيرة. لذلك فالمطلوب العودة إلى الخلف لنلاحظ ما يحدث. الملاحظة الأساسية هي أن عدد المباريات هو بالضبط عدد الخاسرين: فكل مباراة يخرج منها لاعب خاسر وكل لاعب فيما عدا اللاعب الفائز بالبطولة، سوف يخسر مباراة واحدة. ومن ثم يجب أن يكون هناك دائمًا عدد من المباريات يقل واحدًا عن عدد اللاعبين.

هذا برهان رائع لا تشوبه شائبة؛ فهو يمسُّ لُب المشكلة مباشرة ويسمح لنا أن نفهم ما يحدث بتقديم سبب واضح لا شبهة فيه عن سبب هذه النتيجة وكونها دائمًا بهذا الشكل. على الرغم من بساطة وقصر هذا الاستنتاج فليس من السهل بأي حال من الأحوال

الوصولُ إليه؛ فلذلك لا تخجل إذا لم تعرفه وحدك. أمَّا إذا كنت قد استطعت إدراكه وحدك، فلك الحق في أن تُهنِّئ نفسك.



شكل ١-١

هذا المبدأ (تناظر واحد لواحد) بين مجموعةٍ ما لدينا ومجموعةٍ أخرى أسهل نسبيًّا في العد (انظر شكل ١-١) يظهر دائمًا في نظرية العد والاحتمالات. رغم أن هذه الفكرة تبدو بسيطةً، فهي حقًّا فكرة مُهمَّة للغاية. ومن حقك أن ترى، على الأقل إذا وجدت الحل سريعًا جدًّا، أنني أعطي هذه الفكرة أكثرَ من حقها؛ نظرًا لأن الفكرة واضحة بشدة. على أية حال، أنا أعرف أن أذكياء الناس كثيرًا ما يُحدِّقون في مسألة كتلك التي في حالتنا لساعات دون أن يكتشفوا التناظر الأساسي إطلاقًا. ومن المتوقع أن يواجه علماء الرياضيات صعوباتٍ أقل، لكن ذلك أساسًا لأنهم تعلموا هذه الحيل. إنها حقًّا غير واضحة، وإنما هي فقط بسيطة، ومن ثَمَّ فهي سهلةُ الفَهْم فعلًا بمجرد أن يشرحها لك أحدهم.

فيما يلي مسألة مشابهة تتعلق بتقسيم لوح من الشيكولاتة على شكل مستطيل.

(٢) ما أقلُّ عدد من مرات الكسر مطلوب لتقسيم لوح من الشيكولاتة إلى القطع المكونة له؟

لنفترض أن لدينا لوحًا من الشيكولاتة به 5×4 قطعة أي 20 قطعة. جواب السؤال سيكون: 19. لماذا؟ لأنه في كل مرة تكسر قطعة من الشيكولاتة فإن العدد الكلي للقطع

يزيد واحدًا. وبما أنك بدأت بقطعة واحدة، فإنك تحتاج إلى كسر اللوح 19 مرة حتى تحصل على العشرين قطعة من الشيكولاتة.

دائمًا هناك الكثير لنتعلمه من أي مسألة بعد حلها. تذكر أنك لا تحاول الحصول على درجات في امتحان ما ولكنك تحاول تعلُّم شيء عن الرياضيات. هناك الكثير من الأشياء يمكنك استنتاجها إذا ما أخذت لحظات في التفكير فيما شاهدته.

أولًا: حقيقة أن لوح الشيكولاتة كان مستطيلًا لم تُسهِم في الحل. أي إنها يُمكن أن تكون كتلةً واحدة من أي شكل. ثانيًا: حصلنا على الحل للوح مكون من 20 قطعة مُربعة، ولكن من الواضح أن المنطق نفسه سيكون صحيحًا لأي عدد من المربعات؛ فبشكل عام إذا كان هناك n من المربعات، فإن عدد مرات الكسر المطلوبة هو $n - 1$. هذا هو التفكير الرياضي، إيجاد نتائج ومبادئ عامة أكثر من حل مسألة ذات قيمة خاصة مثل 20 في هذه الحالة. سوف تصادف فكرة الانتقال من الخاص إلى العام في مناسبات عديدة خلال هذا الكتاب.

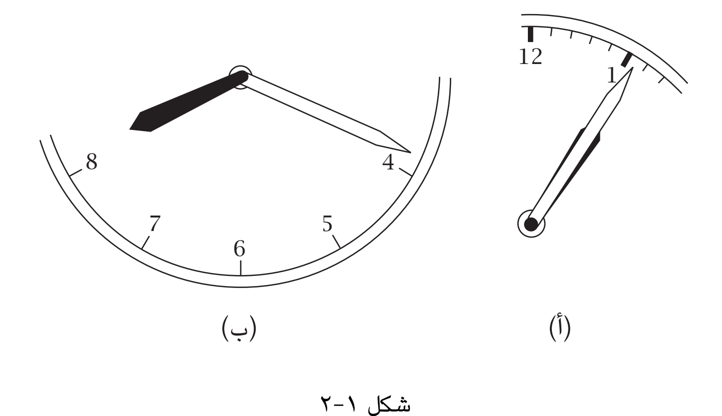
وأخيرًا، كان المطلوب هو إيجاد أقل عدد من مرات الكسر، لكن برهاننا يوضح أنه أكبر عدد أيضًا. على أية حال دعنا نرَ ذلك، $n - 1$ من مرات الكسر يُنتج عدد n من قطع الشيكولاتة. النتيجة لا تعتمد على طريقة كسر الشيكولاتة. ولا توجد طريقة خاصة متميزة لفعل ذلك. قد يكون هذا مخيبًا للآمال، لكن يجب معرفته جيدًا. هذه واحدة من استخدامات الرياضيات — فهي تخبرك دائمًا عندما تهدر وقتك محاولًا أن تفعل المستحيل.

مسألتنا الثالثة تتعلق بوجه الساعة، وسوف نحلها بثلاث طرق.

(٣) متى ينطبق عقربا الساعة؟

لنكن أكثر تحديدًا. متى ينطبق عقرب الدقائق بالضبط على عقرب الساعات، بعد الساعة 12 ظهرًا؟ (انظر شكل ١-٢(أ)). يمكننا أن نرى فورًا أن ذلك يحدث بعد قليل من الوقت 1 : 05، ولكن متى بالضبط؟

فيما يلي حل سريع. بعد مرور الساعة 12 ظهرًا وحتى منتصف الليل، توجد 11 فرصة لتطابق عقربَي الساعة (نعم 11 وليس 12). وكلها على فترات زمنية متساوية، ولذلك فإن الزمن بين تطابقَين متتاليَين يجب أن يكون $12 \div 11 = 1\frac{1}{11}$ من الساعات وهو بالتقريب إلى أقرب ثانية: ساعة و5 دقائق و27 ثانية.



شكل ١-٢

هذا حل بسيط يستغل التماثل الكامن في السؤال: الأزواج المتتالية من التطابق متساوية البعد. على أية حال، هذا الحل يترك لدينا شعورًا بعدم الارتياح بأننا قد خُدعنا رياضيًّا. إن عد التطابقات يتطلب بعض التفكير، والطريقة التي تركنا بها إحدى نقاط النهاية (الظهر) وأخذنا النقطة الأخرى (منتصف الليل) قد تبدو مشكوكًا بها. قد يكون من الأوضح أن نبدأ من نقطة أخرى — مثلًا الساعة الواحدة — ونتأكد من حدوث 11 تطابقًا خلال فترة الـ 12 ساعة التالية. تتجنب هذه الطريقة أية صعوبات تظهر من نقاط النهاية للفترة الزمنية المستخدمة.

على أية حال، هذه مسألة جيدة، ولهذا دعنا نحلها مرة أخرى. هذه المرة سننظر إليها بطريقة مختلفة. دعنا نتخيل أن رأس عقرب الدقائق ورأس عقرب الساعات على الترتيب يمثلان اثنين من هُواة العَدْو يَجريان حول مسار دائري. عقرب الدقائق يكمل بالضبط دورة واحدة في الساعة، بينما عقرب الساعات يزحف ببطء شديد إلى $\frac{1}{12}$ من الدورة في الساعة. السؤال الآن: متى يتراكب عقرب الدقائق أولًا مع عقرب الساعات؟

سوف نترجم المسألة إلى معادلة سهلة جدًّا كما يلي. بعد t من الساعات لفَّ عقرب الدقائق عدد t من الدورات، بينما عقرب الساعات لف فقط عدد $\frac{t}{12}$ من الدورات؛ فمثلًا إذا كانت $t = 4$ فإن عقرب الدقائق لف بالضبط أربع دورات بينما عقرب الساعات وصل إلى $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ الدورة فحسب؛ أي إنه في الساعة الرابعة. المسألة الآن هي إيجاد قيمة t التي عندها يتراكب عقرب الدقائق لأول مرة مع عقرب الساعات. سيكون هذا هو الوقت الذي

يقطع فيه عقرب الدقائق لفَّة كاملة أكثر مما قطعه عقرب الساعات. وينتج عن ذلك تلك المعادلة:

المسافة المقطوعة بواسطة عقرب الدقائق = المسافة المقطوعة بعقرب الساعات + 1؛

أي إن:

$$t = \frac{t}{12} + 1.$$

إذا طرحنا $\frac{t}{12}$ من كلا الطرفين فسنحصل على $\frac{11}{12}t = 1$ أو بعبارةٍ أخرى، فسوف نحصل على الحل الأصلي: $t = \frac{12}{11} = 1\frac{1}{11}$ ساعة.

هذه الطريقة يمكن استخدامها لحل أي مسألة من هذا النوع. فمثلًا ساعات العرض التي لا تعمل لدى بائعي الحلي دائمًا ثابتة على زمن 20 دقيقة بعد الثامنة. حيث يكون عقربا الساعات والدقائق على مسافات متساوية من الرقم 6 على وجه الساعة (انظر شكل ١-٢(ب)). اللحظة الأكثر دقة التي يحدث فيها التماثل هي: $18\frac{6}{13}$ دقيقة بعد الثامنة. والمعادلة التي نحتاجها معقدة قليلًا هذه المرة. لكل دقيقة تمر، يتحرك عقرب الدقائق بمقدار $\frac{360}{60} = 6°$ بينما عقرب الساعات يمر عبر $\frac{1}{12}$ من هذه الزاوية: $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ درجة أي نصف درجة. ومن ثم بعد t من الدقائق بعد الثامنة فإن الزاوية بين عقرب الدقائق والخط المار من مركز وجه الساعة إلى الرقم 6 نحصل عليها من خلال $180 - 6t$ من الدرجات. والزاوية المناظرة الخاصة بعقرب الساعات تبدأ بـ $60°$ وتزيد بمقدار $\frac{t}{2}$ درجة في كل دقيقة. ونحن نرغب في إيجاد قيمة t عندما تتساوى الزاويتان؛ أي إن المطلوب هو حل المعادلة:

$$180 - 6t = 60 + \frac{t}{2}.$$

وهذا يؤدي إلى:

$$\frac{13t}{2} = 120.$$

ويعطي قيمة $t = 18\frac{6}{13}$ دقيقة كما ذُكر سابقًا. فالنتيجة هي: 18 دقيقة و28 ثانية بعد الساعة الثامنة مقربة لأقرب ثانية.

الحل النهائي لهذه المسألة هو أقل براعة وأكثر تعقيدًا من الناحية الرياضية. ومع ذلك فهو يستخدم الاتجاه الذي يتبناه معظم البشر بشكل طبيعي لهذه المسألة وهي تقنية أخيل والسُّلَحفاة. لأننا نستطيع رؤية الحل التقريبي على الفور فالطريقة العملية التي لا تقاوم أن نتابع التقريبات المتتالية كما يلي. يحدث التطابق الأول بعد الساعة الواحدة فنتخيل أن عقربَي الساعة يقفان عند هذا الوقت. بعد خمس دقائق أخيل (عقرب الدقائق) قد وصل إلى الرقم 1 في الساعة. بينما السلحفاة (عقرب الساعات) في نفس الوقت تحرك قليلًا، وطلبًا للدقة حيث إن $\frac{1}{12}$ من الساعة مرت، والسلحفاة تتحرك بسرعة $\frac{1}{12}$ من محيط الدائرة كل ساعة، تكون السلحفاة قد قطعت مسافة مقدارها $(\frac{1}{12} \times \frac{1}{12})$ من الساعة، ويسمح هذا الوقت لأخيل أن يصل إلى مكان السلحفاة التي تكون قد قطعت مسافة مقدارها $(\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12})$ من الساعة، وهكذا.

لا يبدو هذا حلًّا على الإطلاق، فقط مجرد سلسلة متعاقبة من التقريبات الأحسن ثم الأحسن. في الواقع، ظن الإغريق في العصور القديمة أن هذه الطريقة تؤدي إلى صعوبات لا يمكن تخطيها لأنها تنتج قائمة لا تنتهي من المهام، على أخيل أن يؤديَها قبل أن يلحق بالسلحفاة. قد يستغرق ذلك وقتًا لا نهائيًّا؛ ومن ثم فإن المسكين أخيل لن يمسك بالسلحفاة أبدًا. وهذه واحدة من مفارقات زينون.

لا داعي للانزعاج. فحقيقة أننا تخيلنا فترة زمنية محدودة كمجموعة لا نهائية من فترات صغيرة لن تسبب أي صعوبة لأخيل. الفرض الخاطئ الذي أدَّى إلى تلك المفارقة هو أننا عندما نجمع متتابعة لا نهائية من الأعداد الموجبة فإن المجموع يجب أن يتجاوز كل الحدود. قد يبدو هذا معقولًا، لكننا أثبتنا أن ذلك غير صحيح. وبما أننا حللنا بالفعل هذه المسألة — مرتين في الحقيقة — فإننا نستطيع أن نستنتج ما يلي:

$$1 + \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^3 + \cdots = 1\frac{1}{11}.$$

ماذا يعني ذلك؟ هذا يعني أن $1\frac{1}{11}$ هو أقل عدد لا يمكن تجاوزه بإضافة أي عدد محدود من حدود (أعداد) هذه المتتابعة اللانهائية. بعبارة أخرى، فإن المجموع الذي نحصل عليه من هذه المتتالية بعد إضافة المزيد والمزيد من الحدود يزداد أكثر وأكثر، ولكنه لا يتجاوز أبدًا قيمة النهاية $1\frac{1}{11}$.

وهذا يعتبر مثالًا آخر على المتسلسلات الهندسية. وقد صادفنا واحدة منها في سؤالنا الأول عن بطولة التنس. (حيث كانت تحتوي على قوى للعدد 2 وعدد محدود من الأرقام.)

وسوف نتحدث أكثر عن هذا النوع المهم من المتسلسلات في فصلٍ لاحق، ولكن لإشباع فضول القارئ عن هذا الموضوع بشكل مؤقت سنقول بطريقة عابرة إن المتسلسلة:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots,$$

حيث r عدد موجب أقل من 1، لها قيمة نهائية تساوي $1/(1-r)$. في مثالنا كانت $r = \frac{1}{12}$، والمثال الأبسط عندما نعتبر $r = \frac{1}{12}$، فإن صيغة المجموع (غير المثبتة) سوف تعطي:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1\Big/\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1\Big/\frac{1}{2} = 2.$$

لقد تبين لنا أن مسألة الساعة مثمرة للغاية. أما مسألتنا الرابعة فهي أسهل.

(٤) هل تخفيض 10% الذي يتبعه زيادة 10% ليس له تأثير إجمالًا؟

عامل يتقاضى أجره بالساعة، تم تخفيض هذا الأجر بمقدار 10% بينما زادت ساعات عمله بنسبة 10%. رئيسه في العمل أكَّد له أن هذا لمصلحته؛ لأن الرئيس قد أُجبر على تخفيض الأجر حتى يظلَّ قادرًا على المنافسة، وزاد عدد ساعات عمل العامل كنوع من الترضية:

> «صحيح أنك الآن تحصل على 10% أقل في الساعة، لكن لديك 10% زيادة في عدد الساعات؛ ومن ثم فسيصبح أجرك الأسبوعي كما هو.»

هل هذا صحيح؟ لنفترض أن أجر العامل كان 100 جنيه إسترليني في الأسبوع في الأساس. وخُفِّض أجره عن الساعة بنسبة 10% فمعنى ذلك أن أجره الأسبوعي قد أصبح 90 جنيهًا إسترلينيًّا. ثم زاد عدد الساعات بنسبة 10%. والآن 10% من 90 جنيهًا إسترلينيًّا تساوي 9 جنيهات إسترلينية، فهذا سيزيد أجره الأسبوعي 9 جنيهات أسبوعيًّا، مما سيجعل أجره الأسبوعي 99 جنيهًا إسترلينيًّا — وليس 100 جنيه إسترليني.

هل يساعد في ذلك إذا حسبنا بطريقة معكوسة؟ نتخيل أننا زدنا عدد الساعات أولًا بنسبة 10%: ما يعني أن مرتبه يرتفع إلى 110 جنيهات إسترلينية. ثم خفضنا أجر الساعة بنسبة 10%، فإن 10% من 110 هي 11 أي إن أجره انخفض إلى 99 جنيهًا إسترلينيًّا. ومن ثَمَّ، فإننا عندما نحسب بأي طريقة، فسنجد أن العامل سوف يخسر. وهذا يبدو ظالمًا

للغاية — والرياضيات تبدو متآمرةً مع رئيس العمل لاستغلال العامل. على أية حال، ما الخطأ في حُجة رئيس العمل؟

حُجة رئيس العمل مَعيبة، والعيب يكمن في أنه لم يحدد عندما تحدث بشكل فضفاض عن 10% ولم يقل 10% من أي قيمة. فإذا أنت خفضت بنسبة 10% ثم زدت ما معك الآن بنفس النسبة، فإنك لن تعود أبدًا إلى ما بدأت به؛ ومهما كان الترتيب الذي تؤدي به العملية، فإن النتيجة ستكون دائمًا الانخفاض بنسبة 1% إجمالًا.

يبدو أننا بصدد افتقار شديد للتماثل هنا. دعنا ندرس مسألة أخرى مشابهة لنرى هل سنتمكن من استعادة الموازنة. لنفترض أن العامل قد حصل على زيادة في أجر الساعة بنسبة 10% وانخفضت ساعات عمله بنسبة 10%. ربما كان هذا هو الوجه الآخر للعملة — فمرتبه الأسبوعي سيرتفع الآن إلى 101 جنيه إسترليني؟ أخشى أن يكون هذا ما نتمناه أن يحدث بالرغم من أن ذلك غير ممكن. ولكن إذا بحثت الأمر فسوف ينتهي عند 99 جنيهًا إسترلينيًّا مرة أخرى، بالرغم من أن العامل تبعًا لهذه القاعدة سيكون لديه عدد ساعات عمل أقل. (الحسابات هي نفسها كما سبق وتستطيع أن تجرب ذلك بنفسك.)

مرة أخرى، ليس من الصعب اكتشاف اللغز. لتكن P هي الأجر الأسبوعي للعامل. في كلتا الحالتين يُتخذ إجراءان: أحدهما يؤثر بزيادة الأجر بنسبة 10%، أي حاصل ضرب P في $1 + 0.1 = 1.1$، والآخر يخفض الأجر بنفس النسبة ونحصل عليه بضرب الأجر P في $1 - 0.1 = 0.9$. الترتيب الذي تتم به عمليات الضرب هذه غير مهم على الإطلاق (ولم يكن أبدًا مهمًّا):

$$P \times 1.1 \times 0.9 = 0.99 \times P = P \times 0.9 \times 1.1,$$

ومن ثم فإن هذا العامل المسكين دائمًا ما ينتهي به الأمر بفقد 1% من أجره نتيجةً لهذا الزوج من التغييرات. نلاحظ أننا عمَّمنا المسألة مرة أخرى، ولأسباب وجيهة، فإن دراسة الموقف العام يجعل الأمر أكثر وضوحًا؛ وذلك لأننا أصبحنا أقل انشغالًا بالجوانب الخاصة للحالة (وهي القيمة الفعلية للأجر P) حيث إنها لا تؤثر بصورة كبيرة على المشكلة القائمة.

المسائل والبراهين التي تحتوي على نسب مئوية تسبب الكثير من الالتباس، ولا يمكن تجاهلها لأنها تتغلغل في جميع تعاملاتنا المالية وأشياء أخرى كثيرة. لكن ما النسبة المئوية ولماذا تظهر باستمرار؟

الجزء الأول من السؤال إجابته سهلة: 1% من أي مقدار هو ببساطة جزء قدره $\frac{1}{100}$ من المقدار. لماذا نضع كل هذا التركيز على هذا الكسر الخاص؟

الإجابة عملية تمامًا ولهذا السبب فهي لا تحظى بأهمية كبيرة لدى علماء الرياضيات (بالرغم من أن المسائل التي تحتوي على فائدة مركبة أصبح لها مضمون رياضي، وتؤدي إلى أسئلة ليست مجرد أسئلة حسابية بسيطة، وسوف نتعرف على الكثير منها لاحقًا.)

ما نستخدمه هو قوى العدد $(10^2 = 100)$ 10 لأنه أساس النظام العددي الذي اخترنا التعامل به (بلا شك، بسبب عدد أصابعنا). ربما تعلم أن أنظمة الكمبيوتر غالبًا ما تستخدم الأساس 2 أو النظام الثنائي؛ ولهذا فإن الرمزين 0، 1 هما فقط المطلوبان ليناظرا حالتي الآلة من حيث التشغيل أو الإيقاف. وكثيرًا ما قيل إن العمليات الحسابية ستصير أسهل، ومفهومة أكثر، إذا ما استخدمنا النظام الاثني عشري، الذي يكون الأساس فيه هو العدد 12، لأن العدد 12 له عوامل أكثر من العدد 10. ويجبرنا ذلك على تقديم رمزين جديدين للعددين 10 و11 لكن الأساس 12 سوف يستخدم تمامًا مثل الأساس 10. فمثلًا العدد 171 بالنظام الاثني عشري سيصبح 123، حيث إن معنى 123 في النظام الاثني عشري هو $3 + 12 \times 2 + 12^2 \times 1$. وأيُّ عدد ينتهي بالرقم 3 في الأساس 12 هو مضاعف للعدد 3 (أي يقبل القسمة على 3) لأن 3 عامل من عوامل 12. (ويناظر هذا الموقف بالضبط ما يحدث في النظام العشري، حيث إن كل عدد ينتهي بالرقم 5 في النظام العشري هو مضاعف للعدد 5.) وليس من الواضح أن 171 مضاعف للعدد 3 في النظام العشري (رغم أن من السهل التحقق من ذلك بجمع أرقامه والتأكد من كون المجموع مضاعفًا للعدد 3، وهو ما تحقق في حالتنا هذه؛ حيث إن مجموع أرقامه 9).

مثل لغة الإسبرانتو (وهي لغة اصطناعية اختُرعت عام ١٨٧٨ كمشروع لغة اتصال دولية سهلة)، سيكون للنظام الاثني عشري دون شك مزايا كثيرة إذا استطاع العالم أن يواكب التغيير. ورغم كونه نظامًا منطقيًّا، فإنه يبدو أنه سيظل فكرة سديدة لا يتبناها أحد.

لماذا أعطينا اسمًا خاصًّا للكسر $\frac{1}{100}$ بدلًا من $\frac{1}{10}$ أو $\frac{1}{1000}$؟ الأعداد الصغيرة أسهل في التعامل معها من الأعداد الكبيرة، وهذا هو السبب لرفض العدد 1000. والميزة العملية الأساسية للعدد 100 على العدد 10 — كقاعدة عملية — هي أن الكسر $\frac{1}{100}$ من أي كمية هو أصغر جزء له معنًى، فمثلًا خَفْض الأجور بنسبة 1% كبير بما فيه الكفاية ليُشعرنا بالضيق. ومن ثم من الطبيعي أن نعطيَ اسمًا خاصًّا (هو النسبة المئوية) للكسر $\frac{1}{100}$. وتأثير ذلك هو أنه في معظم المناقشات المتعلقة بالأمور المالية خصوصًا ستكون الأعداد المُستخدَمة ذات حجمٍ معقول يمكن عدُّها على أصابع اليدين والقدمين.

وتعتبر تلك النقطة العملية، الحجم الفعلي للوحدات، عاملًا غالبًا ما يُغفَل عنه عندما تناقش مزايا نظام من الوحدات على الآخر. على سبيل المثال، أنا متأكد أن كل واحد تقريبًا يفترض أن الأشخاص ذوي الميول العلمية المَهَرة في التعامل مع الأعداد سيُفضِّلون بشكل تلقائي النظامَ المتريَّ للقياس على النظام الإنجليزي. إلا أن الحقيقة غير ذلك. فكلا النظامين له مزايا وعيوب نسبية. النظام المتري له وحدات تعتمد على قوى العدد 10، مما يجعله متوافقًا مع العمليات الحسابية ذات الأساس 10 وهذا يمنحه سهولة في الاستخدام. هناك توافق آخر في وحدة الحجم (اللتر) جرى اختياره حتى يكون لتر واحد من الماء النقي يزن كيلوجرامًا واحدًا. هذه أيضًا فائدة عملية. إلا أن حجم المتر اعتباطي تمامًا، وربما يمكننا القول إنه سخيف تمامًا، فهو يساوي $\frac{1}{10{,}000{,}000}$ من المسافة من خط الاستواء إلى القطب الشمالي. وهذا يجعله وحدة طبيعية بطريقةٍ ما لكنها ليست طريقة جيدة للاستخدام الواقعي.

من ناحيةٍ أخرى فإن الأحجام الفعلية للوحدات الإنجليزية للبوصة والقدم عملية جدًّا لأنها تتماشى مع المقاييس البشرية للأشياء بعكس السنتيمتر (صغير جدًّا) والمتر (كبير نوعًا ما). تتراوح أطوال البشر ما بين 5 و6 أقدام وأيديهم ما بين 6 إلى 8 بوصات. ومن ثم فهم يُحيطون أنفسهم بأشياءَ من نفس المقاييس، التي تقاس بارتياح بوحدات من القدم والبوصة. سبب آخر لتفضيل الوحدات القديمة هو أن كلمات مثل: «قدم» و«بوصة» أقصر وأسهل على اللسان من سنتيمتر وما شابه ذلك. بالإضافة إلى ذلك، فإن كلمتَي ميل وقدم قد استُخدمتا في تعبيرات اصطلاحية معروفة في اللغة الإنجليزية منذ وقت طويل، وهو ما لم يحدث مع المقاييس المترية، ومع أن هذه نقطة لُغوية تمامًا فإنها ليست أقل أهمية. لو احتوى القدم على 10 بوصات لغزا النظام الإنجليزي العالم.

بالضبط كما أنه من الممكن للناس تعلُّم لغتَين، فإنه من الممكن أن توظف بشكل جيد نظامين للقياس. وآمُل أن يبقى كلا النظامين لفترة طويلة، وأن نتعلم أن نكون أكثر تعايشًا معهما. لا يوجد سبب لأن نتهم أحدهما أو الآخر بالهرطقة. فكلاهما جزء من ثقافتنا.

الكلام عن «جزء» أو «أجزاء» له معنًى فقط إذا علمنا ما الهدف من وراء النقاش. كما رأينا في المثال، الارتباك والغموض نشأ عندما سمحنا لأنفسنا بالكلام عن 10% كما لو كانت شيئًا معزولًا — فهي تعني 10% من شيء ما ونحتاج أن نعرف ماهية هذا الشيء.

ثمة ادعاء شائع وهو أنه لا يمكنك الحصول على أكثر من 100% من أي شيء؛ ومن ثم فإن بيانًا يحتوي على نسبة أكثر من 100% هو أصلًا بدون معنى. من المؤكد أن بيانًا

مثل: «ثمن الأسهم في فابتكس قد انخفض بنسبة 150%» ليس له معنًى. غير أن أسهم فابتكس يمكن أن يرتفع ثمنها بنسبة 150%، وهذا يعني ببساطة أن الزيادة في السعر تساوي 1.5 مرة من ثمنها الأصلي.

حديثًا تعرَّض أحد مراسلي التليفزيون للنقد عندما قال إن نسبة البطالة في مدينة ما قد ازدادت من 20% إلى 25% بزيادة 5%. ويبدو أن عددًا من المواطنين قاموا بالاتصال بمحطة التليفزيون لتوضيح أن المقدار إذا زاد من 20 وحدة إلى 25 وحدة، فإن زيادة النسبة المئوية تكون

$$\frac{25-20}{20} \times 100 = 25\%.$$

أي إن الزيادة تساوي ربع العدد الأصلي. في هذه الحالة يكون المقدار المقصود هو نسبة مئوية، وهذا لا يهم، فقد زاد المقدار بنسبة 25% وليس 5%. إن ملاحظة المعلقين لها معنى بالتأكيد، لأن الزيادة في عدد العاطلين تساوي 5% من القوة العاملة بالمدينة. مرة أخرى، المسألة ببساطة لها علاقة باتفاقنا على ما نشير إليه عندما نتكلم عن نسبة مئوية معينة.

وأعترف أن مسألة أجر العامل، على الرغم من أنها تبدو غريبة، فإنها من وجهة نظر رياضية بحتة أقل أهمية من المسائل الأخرى التي طرحناها حتى الآن، رغم أنني رأيت طالبة فوجئت مفاجأة مذهلة حينما توصلت إلى شيء مشابه. فقد لاحظت أنك إذا أخذت أي عدد مثل 10، وضربت العدد السابق له في العدد التالي له، أي في هذه الحالة 9×11 فسوف تحصل دائمًا على مربع هذا العدد ناقص واحد؛ أي إن $9 \times 11 = 99 = 100 - 1$.

لقد سألتني بحماس: «أليس هذا مذهلًا؟» وبقدر ما كنت مترددًا أن أفعل أي شيء يمكن أن يكبح حماس أي طالبة، فإنني أخبرتها أن هذا ليس مذهلًا كما تتصور، ويمكن شرح هذا على الفور. فكل ما لاحظَته الطالبة هو أنه لأي عدد n:

$$(n-1)(n+1) = n^2 - 1.$$

وأي شخص ما زال يتذكر جبر المدرسة الثانوية سوف يستطيع ضرب الأقواس في الطرف الأيسر ويتحقق من تلك المعادلة الصغيرة. مرة أخرى نرى أن بعض الأشياء قد تبدو غامضةً وصعبةَ التوضيح في حالات خاصة، ولكنها يمكن أن تصبح واضحة تمامًا عند فحص الحالة العامة. فإذا لم تكن على دراية بقواعد الجبر المتضمنة في هذا المثال، فلا تنزعج؛ فسوف نعود إلى هذه الأشياء في فصلٍ لاحق. فهي تستحق بالفعل بعض التبرير،

وهذا يعطي لطالبتي بعض الحق في تعجُّبها ويعطي للعامل بعض الحق في انزعاجه. فحتى الرياضيات البسيطة مثل هذه تحمل درجةً من التعقيد.

(٥) أيهما أفضل أداء؟

حرصًا على الكفاءة والنزاهة، ينتشر وجود مؤشرات الأداء في كل مكان. ومعظمنا يخضع لها. وثمة نموذج يظهر عادةً عند تَكرار دورات مقاييس الأداء وهو أن الأداء يتحسن — ويتحسن أكثر مما كنا نتصور. وهذا ينطبق على كل شيء من نتائج امتحانات تلاميذ المدارس إلى مُعدَّلات الحد من الجرائم إلى تقديرات الأبحاث الجامعية.

إن مقاييس الأداء تجعل حقًّا من يخضعون لها يركزون على تحقيق معدل أداء جيد، ولكنهم لا يركزون على الأداء نفسه؛ فالناس يتعلمون كيف تسير اللعبة. إن مهمة قياس الأداء ليست سهلةً كما قد تتوقع. وحتى في مجال الألعاب الرياضية تظهر الصعوبات في مواقف عادية تمامًا. وفيما يلي نعرض مثالًا بسيطًا.

مؤشر الأداء الرئيسي للرامي في لُعبة الكريكت هو متوسط عدد الأشواط التي يخسرها لكل ويكيت يحرزها؛ فكلما قلَّ العدد كان ذلك أفضل. نفترض في مباراة واحدة أن أحد الفريقَين له اثنان من الرماة، «أ» و«ب»، حقَّقا الأرقام التالية:

في الجولة الأولى: أحرز «أ» 3 ويكيت من 60 شوطًا، بينما أحرز «ب» 2 ويكيت من 68.

في الجولة الثانية: أحرز «أ» 1 من 8، وأحرز «ب» 6 من 60.

في الجولة الأولى كان أداء «أ» أفضل لأن لديه متوسط 20 شوطًا للويكيت، في حين أن متوسط «ب» كان 34. في الجولة الثانية مرة أخرى كانت أرقام اللاعب «أ» هي الأفضل أيضًا، حيث كان متوسطه 8 بينما كان متوسط «ب» 10. على الرغم من ذلك، إذا نظرنا الآن إلى أداء كلا اللاعبَين في المباراة فسوف نرى أن «أ» أخذ إجمالي 4 ويكيت من 68، بمتوسط 17، بينما «ب» أخذ 8 ويكيت من 128، بمتوسط 16. ومن ثم نجد أنفسنا أمام نتيجة غير مستساغة وهي أن «ب» كان أداؤه في المباراة أعلى من «أ»، لكن أداء «أ»، باستخدام نفس مؤشر الأداء، أعلى من أداء «ب» في كلتا الجولتين!

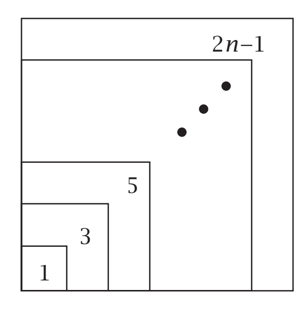
مسألتنا السادسة لها طبيعة مختلفة تمامًا: فقد أوردناها للتأكيد على خاصية من خواصِّ الأعداد التي غالبًا ما يراها الناس صادمةً أو مدهشة.

(٦) لماذا يؤدي جمع أعداد فردية متتالية دائمًا إلى مربع تام؟

$$1 = 1^2, 1 + 3 = 4 = 2^2, 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2, 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2, \ldots$$

جرِّب حالة — أو اثنتين — إضافية. بلا شك، قد تشعر أنك قادر على كتابة صيغة عامة للتعبير عن هذه الفرضية: مجموع أول n من الأعداد الفردية هو n^2. أنت تحتاج لرؤية كيف تعبر عن رتبة العدد الفردي بدلالة n لتفعل ذلك. فالعدد الفردي الأول 1 والعدد الفردي الثاني 3 والثالث 5 وهكذا، أي إن النمط هو مضاعفة العدد ثم طرح 1، بحيث تصبح رتبة العدد الفردي n هي $2n - 1$. ($2n$ هو اختصار لـ $2 \times n$.) ومن ثم يمكننا كتابة الفرضية كما يلي:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2. \tag{1-1}$$



شكل ١-٣

نحن فعلًا اختبرنا هذه الصيغة (1-1) للقيم الأربع الأولى لـ n، ولكن هل نستطيع الحصول على حُجَّة مقنعة بشكل عام؟ هناك بعض منها. سوف أعطي حُجةً ذات طابَعٍ هندسي. الفكرة أخذ شكل بسيط وحساب مساحته بطريقتين مختلفتين يتفق كلٌّ منهما مع أحد طرفَي المعادلة. والشكل الواضح الذي نختاره هو المربع الذي طول ضلعه n حيث إن مساحته هي n^2. وبعد ذلك نجزئ المربع إلى أشكال شرائح غير متداخلة على شكل حرف L، كما في شكل ١-٣، بحيث لا تكون الشريحة في الركن على شكل حرف L وإنما على شكل مربع 1×1. وبما أن كل شريحة تتكون من التي قبلها بإضافة مربعين، واحد عند كل طرف،

فإننا نرى أن المساحة الكلية لهذه الشرائح هي في الحقيقة $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ كما هو متوقع.

كما ذكرت سابقًا، مثل هذه الحُجَج البسيطة يمكن استخدامُها لإثبات نتائج مُهمَّة كثيرة، بما في ذلك النظرية الشهيرة لفيثاغورث كما سنرى في الفصل الثالث.

مسألتنا التالية مشابهة للغاية، على الرغم من أن الحل الذي اخترته مختلف تمامًا.

(٧) ما مجموع أول n من أعداد العد؟

سوف نُثْبِت أن الإجابة هي:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

من السهل جدًّا عليك اختبار أن هذه الصيغة صحيحة للأعداد الصغيرة؛ فمثلًا $1 + 2 + \ldots + 10 = 55 = \frac{(10\times11)}{2}$ كما تقترح الصيغة السابقة. البرهان المعطى هنا ناتج من إعادة ترتيب المجموع. سوف نجمع الحد الأول مع الحد الأخير، والثاني مع الحد قبل الأخير وهكذا. فنحصل على:

$$(1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \cdots$$

الفكرة وراء ذلك أن المجموع في كلٍّ من هذه الأقواس هو نفس العدد $n + 1$. كل ما علينا فعله هو ضرب هذا القوس بعدد الأزواج للحصول على الإجابة. هذا سهل إذا كان n نفسه عددًا زوجيًّا؛ حيث سيكون عدد الأزواج عندئذٍ $\frac{n}{2}$، ومِن ثَم نستنتج أن الإجمالي هو $\left(\frac{n}{2}\right) \times (n + 1)$، وهو نفس الصيغة المعطاة آنفًا: $\frac{n(n+1)}{2}$. فمثلًا عند $n = 10$ فإننا نقول:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + 10 &= (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) \\ &= 11 + 11 + 11 + 11 + 11 \\ &= 11 \times 5 = 55. \end{aligned}$$

أما إذا كان n عددًا فرديًّا فإنه توجد صعوبة بسيطة. طبعًا من المستحيل تقسيم عدد فردي من الأشياء إلى أزواج، فنفس الطريقة السابقة ستترك لنا عددًا واحدًا في الوسط يجب إضافته منفردًا. يمكن التغلب على ذلك بحيلة صغيرة. نكتب فقط صفرًا في بداية العدد. هذا لن يغير الجواب لكنه سيعطينا عددًا زوجيًّا من الحدود نجمعها معًا مرة أخرى وتسمح لنا بإعادة استخدام فكرتنا. مثلًا لقيمة $n = 11$ نعتبر:

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 11 &= (0 + 11) + (1 + 10) + (2 + 9) \\ &+ (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) \\ &= 11 \times 6 = 66. \end{aligned}$$

بشكل عام، للعدد n الفردي، فالمعالجة تجري كما يلي. ضع 0 قبل الجمع وكون الأزواج كما سبق. في هذه الحالة مجموع كل زوج هو n وعدد الأزواج هو $\frac{(n+1)}{2}$؛ حيث إنه يوجد $n + 1$ من الأعداد في المجموع الكلي لأن الصفر 0 أضيف في البداية. ويكون المجموع هو $\frac{n(n+1)}{2}$ بالضبط كما في حالة أن يكون n عددًا زوجيًّا.

هذه الصيغة مُهمَّة؛ لأنه بمجرد إيجادها أصبح سهلًا إيجادُ صيغةٍ لِما يُسمى المتسلسلة الحسابية؛ ولكن سننتظر حتى الفصل السابع قبل الكلام عن هذه النقطة مرة أخرى.

مسألتنا التالية سهلة لكن خادعة؛ ولهذا السبب فهي مُسلِّية. تخيل أن لدينا خيطًا يمتد حول خط الاستواء (على اعتبار أنه دائرة). ومن المقرر رَفْع الخيط مسافة متر واحد فوق سطح الأرض.

(٨) ما مقدر الزيادة التي يجب أن يزيد بها طول الخيط الذي يمتدُّ حول خط الاستواء لكي يرتفع بمقدار متر واحد عن سطح الأرض؟

دعنا نقترح أربعة احتمالات:

(أ) 6 أمتار.
(ب) 6كم.

(ج) 600كم.
(د) 60,000كم.

هل قمت بالتخمين؟ الإجابة الصحيحة هي: (أ). سواء تفاجأت، أو لا، فكيف يمكننا الوصول إلى هذه الإجابة؟ يبدو أننا بحاجة إلى معلومات أكثر، خاصَّة معرفة محيط الكرة الأرضية من أجل حساب الإجابة. ربما نعم وربما لا. دعنا نبدأ دون خوف، وباستخدام رمز للمجهول: ليكن r هو نصف قطر الأرض، ومِن ثَمَّ يكون محيط الأرض $2\pi r$ (حيث π هي النسبة التقريبية 3.14). أي إن الطول الأصلي للخيط هو $2\pi r$. عند رفع الخيط مترًا واحدًا أعلى سطح الأرض فإن الخيط يُغطِّي دائرةً نصف قطرها $r + 1$ ويصبح طوله $2\pi(r + 1)$. كل ما نريد معرفته الآن هو الفرق بين المحيطين، وعلى الأقل يمكننا كتابة تعبير لهذا الفرق:

$$2\pi(r + 1) - 2\pi r.$$

بضرب الأقواس (وتَذكَّر أنه لأي عدد a فإن: $a(r + 1) = ar + a$ وأنَّ 2π ما هو إلا عدد)، سوف نحصل على:

$$2\pi r + 2\pi - 2\pi r = 2\pi,$$

وبالطبع 2π أكبر قليلًا من 6، مما يوضح أن أ هو الاختيار الأصح.

سواء إذا كنت قد وجدت الإجابة مدهشةً أم لا، فحقيقة أننا نستطيع إجابة السؤال من الأساس مدهشة. فنحن لم نحتَجْ إلى معرفة نصف قطر الأرض. وهذا له نتائجُ صادمة. فحيث إن الإجابة لم تعتمد على قيمة r، فهذا يعني أن الإجابة ستظل هي نفسها لأي كرة، سواء أكانت كرة سلة أو حتى كوكب المُشترِي!

الحقيقة أنَّ افتراضَنا أن خط الاستواء دائرة تامة لم يكن له تأثيرٌ مُهم في نتيجتنا. فافتراض أنه دائرة سمَحَ لنا بكتابة التعبير الدقيق $2\pi r$ للمحيط. والتغيير لشكل مختلف حتى لو كان غيرَ منتظمٍ تمامًا سوف يغير ثابت التناسب قليلًا، لكن عددًا صغيرًا مثل الإجابة أ سيظل ساريًا. الأهمُّ من ذلك أن عدم اعتماد الإجابة على حجم الشكل لا يزال صحيحًا — لأي شكلين متماثلين، سواء أكانا دائرتين أم قطعَين ناقصَين أم شكلين أقل انتظامًا، فالزيادة في طول الخيط لا تعتمد على حجم الكوكب المذكور. (جرب بنفسك

المسألة بأخذ كوكب مكعب، وستكتشف أنك تحتاج إلى زيادة طول الخيط بمقدار ثمانية أمتار.)

(٩) كيف يقتسم عدد n من الرجال زجاجة من الفودكا؟

لقد أكَّد لي عددٌ من الزملاء الرُّوس أن هذه مشكلة في الواقع خطيرة جدًّا. توجد زجاجة واحدة ليشترك فيها n من الشاربين، وكلٌّ منهم ينبغي أن يقتنع أنه أخذ حصة عادلة. كيف يمكن تحقيق هذا؟

إذا كانا شخصين اثنين، فالأمر بسيط. أحدهما يصبُّ في كأسَين كميَّتَين متساويتَين تقريبًا من وجهة نظره من المشروب الثمين، بمعنى أن من يصب سيكون سعيدًا بالحصول على أيهما. ويُعطَى الثاني حريةَ اختيار إحدى الكأسين، أيًّا كانت. وبهذا لا يشتكي أيٌّ منهما.

إنها ليست عملية صعبة جدًّا مع عدد أكبر من الشاربين أن نبتكر أسلوبًا عمليًّا لأي عدد n. الأول أ يصبُّ ما يدَّعي أنه حصة عادلة. فإذا فكر أيٌّ من الآخرين أنها حصة كبيرة، فليأخذ واحد منهم — وليكن ب — كأس أ وينقصها إلى الكمية التي يراها مناسبة، (طبعًا بدون أن يشربها). ومن المفترض ألَّا يعترض أحد إذا اعتقدوا أن أ راضٍ بما يبدو أنه أقل من نصيبه.

إذا اعتقد أحدهم أن ب أخذ أكثر من حقه، فعلى هذا الشخص أن يأخذ كأس ب ويصب الزيادة التي يظنها. وتستمر العملية. ومن الأهمية بمكان ملاحظة أنه عندما تمر الكأس من يد إلى يد، فلن يعترض أحد من الأشخاص السابقين على المستوى الحالي للكأس؛ فمثلًا أ لا يستطيع الشكوى من أن ب حصل على زيادة لأن ب وضع كمية أقل مما حسبه أ حصة عادلة. وفي كل خطوة يقل عدد المعارضين المحتملين، حتى نصل إلى الوضع الذي يمسك فيه أحد الأشخاص، وليكن س، الكأس التي يعتقد أنها تمثل حصة عادلة ولا يميل أحد من الآخرين إلى معارضته.

وعندئذٍ يصبح السيد س سعيدًا وينسحب من العملية ليحتسيَ شرابه. ويكرر الباقون نفس العملية بكاملها، ولكن بشارب أقل والباقي من الفودكا حتى يحصل كلٌّ منهم على شرابه ويكون سعيدًا.

رغم ذلك، فإن أحدهم قد لا يكون سعيدًا تمامًا. فهذا النظام المرهق، بصرف النظر عن أنه يختبر صبر المشاركين، يُخفِق في ضمان ألَّا يحسد أحدُهم الآخرَ على كأسه. فصحيح

أن أحدهم لا يستطيع الادِّعاء أنه لم يحصل على حصةٍ عادلة، ولكنَّ واحدًا من الذين خرجوا مبكرًا من العملية (مثل السيد س الذي أخذ أول كأس) قد يكون مقتنعًا أنَّ واحدًا ممن خرجوا لاحقًا حصل على حصة أكبر من حصته؛ لأن الباقين كانوا حمقى لدرجة تركه يحصل على ذلك.

الرياضيات المحتواة في هذا السؤال تكمن في أسلوب البرهان أكثر منها في المهارة في الحسابات. هذا المنهج، الذي نحول فيه الوضع من التقسيم على عدد n إلى التقسيم على $n-1$ يُطلق عليه الحُجَّة الاستقرائية.

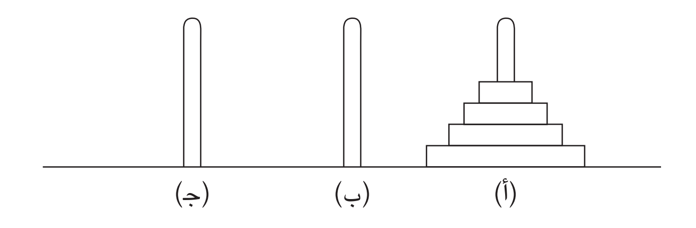
مسألتنا التالية تُحل أيضًا بنفس هذه الطريقة خطوةً بخطوة.

(١٠) كم من الوقت يستغرق بناء برج هانوي؟

تتكون مسألة برج هانوي الكلاسيكية من ثلاثة أوتاد: أ، ب، جـ، مع برج مدرج من حلقات مُتَّحدة المركز موضوعة على الوتد الأول كما في شكل ١-٤. والهدف هو نقلُ البرج من أ إلى جـ، مع التقيُّد بالشرطين التاليين عند تحريك الحلقات بين الأوتاد:

(أ) يمكنك تحريكُ حلْقةٍ واحدة في المرَّة الواحدة.
(ب) لا تضع حلْقةً أكبر فوق حلْقةٍ أصغرَ منها.

جرِّب اللُّعبة ببرج صغير مُكوَّن من ثلاث أو أربع حلَقات. وسوف تفهم على الفور كيف يتم ذلك. وعليك أن تجد أقلَّ عددٍ من التحركات حتى تصل إلى الهدف.



شكل ١-٤

بعد ذلك علينا أن نُوجِد أقلَّ عدد من التحركات المطلوبة لإنجاز اللعبة المكونة من عدد n من الحلقات.

الخاصية الرياضية التي يجب فَهمُها هي أنك لكي تلعب اللعبة المكونة من عدد n من الحلقات، فعليك أولًا أن تلعب اللعبة المكونة من عدد $(n-1)$ من الحلقات. فمثلًا انظر إلى اللُّعبة المكونة من أربع حلقات، والتي تمثل تمثيلًا تامًّا الوضع العام. لن تستطيع تحريك الحلقة الكبيرة في الأسفل حتى تكون قد نقلت برجًا مكونًا من ثلاث حلقات إلى وتد آخر؛ أي يجب أن تلعب أولًا المباراة بثلاث حلقات. بعد ذلك يمكنك وضعُ الحلْقة الكبيرة في المكان المطلوب بحيث لا تتحرك ثانيةً. لإتمام العملية عليك تحريك برج الحلقات الثلاث وتضعه على الحلقة الكبيرة، أي إنك سوف تلعب اللُّعبة المكونة من ثلاث حلقات مرة أخرى.

فإذا رمَزنا إلى أقلِّ عدد من التحركات المطلوبة لنقل البرج ذي الحلقات الأربع بالرمز a_4، ورمزنا إلى أقل عدد من التحركات لنقل البرج الثلاثي الحلقات بالرمز a_3، فالبرهان السابق يوضح أن: $a_4 = a_3 + 1 + a_3$ أو بعبارة أخرى $a_4 = 1 + 2a_3$. وبطبيعة الحال فإن هذه الحجة تنطبق على اللعبة المكونة من عدد n من الحلقات، مما يدل على أنه لأي عدد $n = 2, 3, \ldots$ يكون:

$$a_n = 1 + 2a_{n-1},$$

حيث a_n يرمز إلى أقل عدد من التحركات المطلوبة لإنجاز اللعبة المكونة من عدد n من الحلقات. وحيث إنه من الواضح أن $a_1 = 1$ (أي إننا نحتاج حركة واحدة لتحقيق الهدف في اللعبة المكونة من حلقة واحدة) يمكن استخدام هذه الصيغة — واسمها التقني التكرارية — لحساب القيم المتتالية من a_n؛ على سبيل المثال: $a_2 = 1 + 2 \times 1 = 3$ و$a_3 = 1 + 2 \times 3 = 7$ و$a_4 = 1 + 2 \times 7 = 15, \ldots$ ومن ثم نحصل على متتابعة الأعداد التالية:

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, \ldots$$

هل ثمة نمط معين يبدأ في الظهور؟ الإجابة: نعم، فإذا بدأنا بالعدد 2 وضاعفناه في كل مرة، فإننا نحصل على نفس المتتابعة تقريبًا:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$

رتبة العدد n في هذه المتتابعة الأخيرة هو 2^n؛ ومن ثَمَّ فإن a_n، وهو أقل عدد من التحركات المطلوبة لبناء برج هانوي ينتج بالمعادلة:

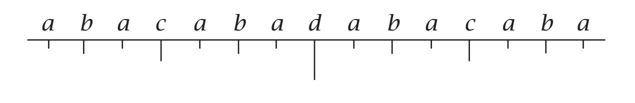
$$a_n = 2^n - 1, \quad \text{for all } n = 1, 2, \ldots$$

القصة التي عادة ما تصاحب لعبة برج هانوي (الذي يحتوي على 64 حلقة) هي أن الرهبان يمكنهم تحريك حلقة واحدة في اليوم، وعندما يُكمِلون مُهمَّتهم ستحدث كارثة تعمُّ الجميع. لا داعي للانزعاج بهذا الشأن. حتى لو كان عدد الحركات اليومية المتاحة 100 في اللعبة المكونة من 20 حلقة، فإننا سنحتاج إلى 30 سنة تقريبًا — كما أن مهمة الرهبان في اللعبة المكونة من 64 حلقة ستستغرق بلايين السنين.

على الرغم من ذلك، فهذه ليست نهايةَ القصة في الرياضيات. يمكننا بالطبع تعميم السؤال، ونسأل ماذا يحدث إذا كان هناك 4 أوتاد! أو حتى عدد k من الأوتاد؟ هذه الأسئلة تنتج مسائل مشابهة لكن أكثر تعقيدًا. وتوجد رياضيات مختلفة إذا كنَّا مهتمين بالبحث عن المتتابعات الفعلية للتحركات وتشفيرها بطريقة طبيعية، كما أشار إلى ذلك كتاب مارتن جاردنر «ألغاز وألعاب رياضية». فإذا قمنا بتسمية الحلقات الأربع في ترتيب تصاعدي بالنسبة للحجم a, b, c, d ولعبنا لعبةً مكوَّنة من أربع حلقات وكتبنا اسم كل حلقة حركناها فسنحصل على المتتابعة:

$$a, b, a, c, a, b, a, d, a, b, a, c, a, b, a.$$

هذا النوع من المتتابعات جدير بالملاحظة لأنه يظهر في أماكنَ أخرى غير هذه المسألة. على سبيل المثال، إذا أخذنا المسطرة القديمة حيث البوصات مقسمة ثنائيًّا إلى أنصاف، وأرباع وأثمان و$\frac{1}{16}$ (شكل ١-٥) وهو ما يقابل أصغر حلقة a، بينما الثُّمن يقابل الحلقة b، وهكذا، فسوف تحصل على القائمة السابقة نفسها. مثل هذه الظاهرة الرياضية أحيانًا توفر عاملًا مشتركًا في حالتين لولا ذلك لكانتا غير مرتبطتَين، وهو ما يعتبر غالبًا مفتاحًا للفَهْم.



شكل ١-٥

الفصل الثاني

الحقيقة حول الكسور

علماء الرياضيات ليسوا مولَعين بالآلات الحاسبة كما قد تتوقع. والكمبيوتر والآلات الحاسبة اخترعها وطوَّرها بالطبع علماء الرياضيات والمهندسون وهي مفيدة جدًّا، فلماذا نحن، على أفضل تقدير، منقسمون تجاهها؟ السبب أن الآلات الحاسبة لا تُفيد كثيرًا عندما يتعلق الأمر بالمفاهيم الأساسية للحساب، ويمكن أن تُستخدم بأسلوب يجعلها تحلُّ محل التفكير بدلًا من أن تحفزه. واستعمال الآلات الحاسبة على نطاق واسع في دروس الرياضيات يمكن أن يُقوِّض العملية التعليمية. وهذه الحقيقة مُعترَف بها الآن في التعليم؛ ومن ثم تم تقليص الاستخدام العشوائي للآلات الحاسبة.

الأثر المؤسف الآخر لاستخدام الآلة الحاسبة هو أنها تجعل المادة مملة. فالرياضيات في المدارس الثانوية تقلَّصت إلى سلسلة من ضغط الأزرار، مما شجع الطلاب على نسيان الرياضيات أو على الأقل الابتعاد عنها. والتحفيز العقلي الذي تُتيحه الآلات الحاسبة يشبه ذلك الذي يتيحه الوقوف على طاولة الدفع في السوبر ماركت. فالمنهج العملي لا بأس به ما دام أنه لا يؤدي إلى تعطيل التفكير! فعادةً ما يكتب الطالب الذي يستخدم الآلة الحاسبة القليل جدًّا أو لا يكتب على الإطلاق، وهذا يجعله عاجزًا عن التعبير رياضيًّا وغير قادر على حل مسألة تحتاج إلى أكثر من خطوة واحدة.

ومع ذلك ففي هذا الفصل، آمُل أن أستغل مزايا استخدام الآلات الحاسبة. وبفعل ذلك سوف نقابل أغرب فكرة في هذا الكتاب، وهي فكرة المجموعة غير القابلة للعد. وتكمن غرابتها في كونها أبعدَ ما تكون عن العالم الواقعي، بالرغم من أن نقطة البداية ستكون سلسلةً مألوفة من الأرقام على شاشة عرض الآلة الحاسبة.

الآلات الحاسبة سمحت للناس أن يصبحوا أكثر راحة مع الكسور العشرية، وربما لمدى غير مرغوب فيه؛ إذ إنهم كثيرًا ما يفضلون التقريب العشري القبيح عن كتابة كسر

بسيط ودقيق. على سبيل المثال، كم مرة نرى 66.7% مكتوبةً في حين أن القيمة الدقيقة هي $\frac{2}{3}$؟

(١) لماذا من الأحسن أن نستطيع أن نقوم بالحساب؟

الحساب العادي صعب جدًّا؛ فقد استغرقَت البشرية آلاف السنين لتُتقنه. والفَهْم الكامل لحساب الكسور يستلزم جهدًا لتحصيله. ففي القرن التاسع عشر، كانت لا تزال هناك جوانب أساسية في الكسور قيد الاكتشاف. فما تسمى متسلسلة فيري لرتبة n هي ببساطة قائمة بجميع الكسور بين 0 و1 التي لا تزيد مقاماتها على n، مكتوبة بترتيب تصاعدي. فمثلًا متسلسلة فيري للرتبة الخامسة هي المتسلسلة:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

متسلسلات فيري مليئة بالخواص الجبرية وربما الهندسية الأنيقة أيضًا، وقد اكتشفها رياضي هاوٍ. ربما كان عدمُ اكتشاف مثلِ هذا الجانب الأساسي والمثير للاهتمام من الرياضيات من قِبَل كافَّة علماء الرياضيات عبر العصور؛ شيئًا صادمًا للعقول الجبَّارة في ذلك الوقت، على الرغم من أنه يبدو أن الخواص الأساسية لمتسلسلة فيري نُشرت أول ما نُشرت في عام ١٨٠٢ بواسطة هاروس الذي توقع نشر متسلسلة فيري قبلها بأربعة عشر عامًا.

فلنَعُد إلى البداية، لطالما سمعنا الأطفال الذين يحاولون إجراء الجمع (ربما دون بذل الجهد الكافي)، وهم يقولون:

> «لماذا أنا بحاجةٍ لتعلُّم هذا؟ إذا رغبت في معرفة جواب هذه المسألة، فأنا أستطيع استخدام آلتي الحاسبة.»

هذا النوع من الأسئلة كثيرًا ما يكون ناجمًا عن الإحباط، والذين يسألونه لن يُرحِّبوا بإجابة مستفيضة. إن عدم القدرة على التعامل مع الأعداد يمكن أن يكون مشكلة دائمة. فإذا كنا لا نستطيع إجراء عمليات الجمع فنحن مضطرون للاختباء كلما ظهرت أشياء عددية. وحتى الآلات الحاسبة نفسها لن تساعد كثيرًا الشخص الجاهل في الرياضيات، لأنه لن يشعر أبدًا بالثقة أنه استخدم الآلة بطريقة صحيحة؛ فالآلة الحاسبة بالنسبة له لن تكون أكثر فائدة من القاموس بالنسبة لشخص لا يعرف القراءة.

التعامل مع أسئلة الأعداد والقياسات العادية يتطلب تدريبًا إلى المستوى الذي هو على الأرجح يتجاوز ما أنت في حاجة إليه عمليًّا. وهذا لأن المشاكل التي تقابلها يجب أن تكون مفهومة جيدًا لك حتى تستطيع أن تتعامل معها بثقة في أي موقف عملي.

هل نحن بحاجة لمعرفة الجداول؟ نعم، وسوف أشرح لماذا. إن المعرفة بنظام الأعداد التي يولدها تعلم الجداول، في حدِّ ذاتها، أمرٌ جدير بالاهتمام، لكنَّ هناك جانبًا رياضيًّا أساسيًّا للوضع كذلك. من الأهمية بمكان أن نعرف أن جداول الضرب لا تُمثِّل مجموعةً من الحقائق العشوائية، مثل قائمة أرقام التليفونات، ولكنها أقل مجموعة من حواصل الضرب التي نحتاج إلى معرفتها لكي نقوم بعمليات الحساب العادية.

لكن دعونا ننظر إلى شيء أكثر بُدائيَّة: الجمع. فحتى نتمكن من إجراء عمليات الجمع نحتاج إلى معرفة جداول الجمع حتى 10؛ مثلًا لجمع العددين 17 + 59 يجب معرفة نتيجة 7 + 9. وبنفس الطريقة يجب أن نتذكر جداول الضرب حتى 10 حتى نتعلم كيف نضرب عددين معًا. (بالمناسبة، العددان $a + b$ و$a \times b$ يُعرفان على الترتيب بأنهما مجموع a وb، وحاصل ضرب a وb؛ أما العدد $\frac{a}{b}$ فيُسمى خارج قسمة a على b.) وإذا لم نكن نعرف عمليات الجمع والضرب هذه عن ظهر قلب، فإننا سنُضطرُّ إلى إعادة تعلُّمها في كل مرة.

لماذا هذه المجموعة الخاصة من الحقائق ضرورية لكي نقوم بالحساب؟ من المؤكد أن هناك بعضَ العشوائية هنا، لكنها ظهرت فعلًا عند بداية تطور الحساب عندما قررنا استخدام الأساس 10. وكان هذا الاختيار بمحض إرادتنا، لكننا الآن ندفع ثمن ذلك من خلال الحاجة إلى تعلم جداول الجمع والضرب إلى رقم 10 — فلو كنا قررنا اختيار النظام الثنائي، لكان لدينا جداول الجمع والضرب التافهة لنحفظها.

جرى العُرف على دراسة جداول الضرب حتى جدول 12؛ وهذا لأن كثيرًا من نُظم القياس تعتمد على الأساس 12 (الجنيه الإسترليني، والشلن، والبنس، والقدم، والبوصة ... إلخ)، ولأن حواصل الضرب حتى 12×12 تظهر كثيرًا جدًّا فيجدر حفظُها عن ظهر قلب. وهي لا تزال واجبة الحفظ، بالرغم من أن الحُجَّة لعمل ذلك أصبحت أقلَّ إلزامًا.

من أجل فَهْم الأعداد إلى مدًى مفيد، على الطالب إجراء الكثير من الحساب. ليست الإجابة هي الشيء المهم، لكن تنمية المهارة المطلوبة للحصول عليها. إن القيام بالعمليات الحسابية يغرس في الطالب أُلفة أساسية مع الأعداد ويزرع فيه الثقة في معالجتها. وكل الرياضيات ذات المستوى الأعلى تنطوي على نفس طرق التعامل، وتستخدم فيها

رموز جبرية بدلًا من أعداد خاصة؛ ومن ثم يحتاج الطالب إلى ترسيخ أقدامه تمامًا في الحساب حتى يتمكَّن من إجراء هذه المعالجات بطريقةٍ تكاد تكون طبيعية. إن عدم إتقان الأساسيات يضع عقبةً أمام فَهْم كلِّ المفاهيم الجديدة. بشكل خاص، يجب أن نكون قادرين على التعامل مع الكسور لكي نتمتع بأي إمكانيات رياضية حقيقية.

هذا الكتاب ليس مقررًا لتذكيرك بهذه الأشياء، ولكنني سأنتهز هذه الفرصة لأقول شيئًا عن الموضوع. حتى إذا كنت على معرفة تامَّة بحساب الكسور، فأنا أدعوك لقراءة باقي هذا القسم؛ فقراءة الأشياء التي يعرفها المرء بالفعل يمكن أن تكون ممتعةً جدًّا، وما زلت آمُل أن أقدِّم لك مفاجأةً أو اثنتين.

يتطلَّب حساب الكسور فكرةً واضحة عن تساوي الكسور. إذا تصورت كعكة قُسمت إلى نصفين ثم إلى أرباع، فسترى أنه على الرغم من أن مفهوم $\frac{2}{4}$ و$\frac{1}{2}$ مختلفان، فإنهما يمثلان أجزاءً متساوية من الكعكة. فالكسور $\frac{1}{2}$، $\frac{2}{4}$، $\frac{3}{6}$، ... إلخ متكافئة. سنقول إنها متساوية، بالرغم من أن هذا غير دقيق إلا إذا شرحنا: أي إن $\frac{1}{2}$ و$\frac{2}{4}$ كسرَان مختلفَان، لكنهما متساويان من منطلق أنهما يمثِّلان مقدارين متساويين. الجانب الجيد الآخر لهذا الوضع هو أنه على الرغم من وجود عددٍ لا نهائيٍّ من الكسور المساوية لكسرٍ معين، فإن واحدًا فقط منها هو الكسر المختصر؛ وهذا يعني أنه اختُصر حتى لم يَعُد يوجد بين العدد أعلى علامة الكسر ويُسمى البسط، والعدد أسفل علامة الكسر ويسمى المقام، أي عامل مشترك غير 1. على سبيل المثال: الكسران $\frac{6}{15}$ و$\frac{12}{30}$ كل منهما يُختصر إلى $\frac{2}{5}$، أي إن $\frac{2}{5}$ هي الصورة المختصرة للكسرين. ومن المؤكد أن الصورة المختصرة أكثر شهرة وهي الأبسط؛ لأنها تحوي أصغر بسط ومقام من بين جميع الصور الباقية.

التساوي بين الكسور يمكن التعبير عنه أيضًا من خلال الضرب التبادلي؛ أي ضرب الوسطَين في الطرفَين:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc.$$

(السهم مزدوج الرأس يُقرأ: يكافئ، والسهم ذو الرأس الواحد $\Rightarrow$ يُقرأ: يستتبع.)

بشكل أعم يُمكِننا اختبارُ ما إذا كان الكسر الموجب أقلَّ من أم يساوي كسرًا آخر باستخدام الضرب التبادلي:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad \leq bc.$$

(للتذكرة، رموز عدم التساوي مثل ≤، أقل من أو تساوي، دائمًا تشير إلى العدد الأصغر في العددين.) تعتبر القاعدة في مقارنة الكسور صحيحة أيضًا إذا استبدلنا ≤ بأي واحدة من >، أو <، أو ≥. القاعدة صحيحة لأن عدم التساوي يظل كما هو إذا ضُرب الطرفان في أعداد موجبة ويمكننا المرور من عدم التساوي الأول إلى الثاني عن طريق ضرب الطرفين في العدد bd. مثال:

$$\frac{2}{3} < \frac{5}{7} \Longleftrightarrow 14 < 15.$$

نحن الآن في وضع يُمكِّننا من إعطاء قاعدة عامة لجمع أو طرح الكسرين $\frac{a}{b}$ و$\frac{c}{d}$. أولًا نعوض عن الكسرين بكسرَين متساويَين لهما مقام مشترك. المقام المشترك يمكن إيجادُه بضرب المقامين معًا فنحصل على bd. لأن $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$، $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ فنحصل على:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}. \qquad (2\text{–}1)$$

الإشارة ± تعني زائد أو ناقص، وتستخدم لضرب عُصفورَين بحجر واحد. هذه القاعدة صحيحة دائمًا لكن الإجابة الناتجة قد لا تختصر على الرغم من أن الكسرين الأصليين قد يمكن اختصارهما. على سبيل المثال:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{1 \times 9 + 2 \times 6}{6 \times 9} = \frac{9 + 12}{54} = \frac{21}{54} = \frac{7}{18}.$$

من المستحسن وجود قاعدة مثل (2–1) تعطي الإجابة في كل مرة، لكنَّ هناك مأخذًا على ذلك. أولًا: تحتوي القاعدة (2–1) على جميع المعلومات التي تحتاجها لإضافة وطرح الكسور، لكنها قد تثير ملل الشخص غير العارف بالموضوع حيث إنه لم يفهم الفكرة الأساسية للعملية. فمن الأفضل أن تعتبر ملخصًا لما يحدث. ثانيًا: القاعدة لا تمثل دائمًا أحسن الطرق للحصول على مجموع معين. فعمليًّا، يكون الأفضل البحث عن أقل مقام مشترك؛ أي أقل مضاعف للعدد b والعدد d. وحاصل الضرب bd هو مضاعف للعددين b وd لكنه ليس بالضرورة أقل مضاعف. وبشكل عام، هذا المضاعف الأصغر نحصل عليه من العلاقة $\frac{bd}{h}$ حيث h هو القاسم المشترك الأكبر لكل من b وd، وسوف نقدم المزيد عن هذا في الفصل الرابع. في مثالنا السابق قيمة h هي 3؛ ومِن ثَم أصغر مقام مشترك

هو $18 = 6 \times 3 = \frac{(6\times 9)}{3}$. ومن ثم:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{3}{18} + \frac{4}{18} = \frac{7}{18}.$$

ويعتبر ضرب الكسور أسهل من جمعها: ببساطة نضرب كلا البسطين وكلا المقامين. مرة أخرى الجواب الذي نحصل عليه قد لا يختصر:

$$\frac{5}{12} \times \frac{9}{10} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}.$$

من المهم أن يكون الذهن حاضرًا للبحث عن عوامل قبل القيام بعملية الضرب، لأن من الممكن الحذف بسهولة:

$$\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{12}^{4}} \times \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{10}^{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}.$$

توجد نقطة عامة يجب عرضُها هنا، ويأخذ طلاب الرياضيات وقتًا طويلًا لاستيعابها. وهي أنه من الأسهل الاختصار في الكسر $\frac{45}{120}$ عند كتابته كحاصل ضرب $\frac{9}{10} \times \frac{5}{12}$. حيث إن من الأسهل غالبًا أن تجري الحساب على عدد ما، أو تطبق الجبر على تعبير جبري، قبل إجراء عملية الضرب؛ بدلًا من إجرائه بعدما تحصل على نتيجة الضرب.

للأسف، الطالب المتعجل للحصول على الإجابة غالبًا ما يتجاهل ذلك، ويقوم بعمليات ضرب غير ضرورية، مما يؤدي إلى نتائجَ عكسية. مع وجود الآلة الحاسبة في متناول اليد أخشى أن الإغراء لا يقاوَم. وعند الحصول على الإجابة الصحيحة، نادرًا ما يكون ذهن الطالب حاضرًا ليحلل ما فعل ويحذف الخطوات غير المطلوبة. هنا يمكن للمعلم الجيد مساعدته.

مباشرة يمكن رؤية أن قاعدتنا لضرب الكسور لها معنًى. إذا قسمنا كعكة إلى عدد b من الشرائح المتساوية وقسمنا كل شريحة إلى d من الأجزاء المتساوية، فإننا نكون بذلك قد قسمنا الكعكة إلى bd من القطع المتساوية أي إن:

$$\frac{1}{b} \times \frac{1}{d} = \frac{1}{bd}.$$

فإذا ضربنا هذا في البسطين a وc نحصل على القاعدة العامة:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

أخيرًا، تقسيم الكعكة على n يعني أخذ $\frac{1}{n}$ منها. وعمومًا، للقسمة على $\frac{a}{b}$ نضرب المقدار في المعكوس $\frac{b}{a}$. وخلاصة القول:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

هذا فعلًا يجعل عملية القسمة عكس الضرب، لأنه إذا ضربنا في $\frac{a}{b}$ ثم قسمنا عليها، فإن تأثير العمليتين هو الضرب في $1 = \frac{ad}{ba} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{b}$. ومع ذلك فإن قسمة الكسور غالبًا ما تُعَد لغزًا. هذا لا يعني أن الناس لا يستطيعون الجمع، كل ما في الأمر أن قاعدة «اعكس الكسر الثاني ثم قم بعملية الضرب» ما زالت غامضة. أفضل طريقة لجعل العملية مقنعة هو أن تقوم بالقسمة مباشرة وتلاحظ أن الأثر الصافي لِما قمت به هو ما تم وصفُه بالقاعدة السابقة.

مثال: ما الناتج من $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$؟ بتطبيق القاعدة:

$$\frac{2}{3} \bigg/ \frac{3}{4}.$$

لنخلص أنفسنا من المقام في الكسر الأسفل وذلك بضرب كل كسر في 4: تأثير هذه العملية هو الضرب في $1 = \frac{4}{4}$ ومِن ثَم قيمة الكسر لا تتغير:

$$\left(\frac{2}{3} \times 4\right) \bigg/ \left(\frac{3}{4} \times 4\right) = \left(\frac{2}{3} \times 4\right) \bigg/ 3 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}.$$

أي إن القسمة على $\frac{3}{4}$ هي نفسها الضرب في $\frac{4}{3}$.

استخدامات الكسور يمكن رؤيتها في سجلات قدماء المصريين الذين استخدموا كسر الوحدة، وهو عدد كسري بسطه يساوي 1 ومقامه عدد صحيح موجب مثل $\frac{1}{5}$ و$\frac{1}{20}$ بحُرية، لكنهم لم يعترفوا بأن الكسور مثل $\frac{2}{7}$ لها نفس الوضع بالرغم من أن الكسر $\frac{2}{3}$ كان له رمز خاص. بمعنى أنهم عبَّروا مثلًا عن $\frac{2}{7}$ بالمجموع $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$. (ولكن يبدو أنه

لم يَرُق لهم استخدام البديل الواضح بالنسبة لنا وهو $\frac{1}{7} + \frac{1}{7}$.) ومع ذلك، فهذا يؤدي إلى مشكلة حقيقية. فهل من الممكن أن نكتب أي كسرٍ فعلي يقع بين 0 و1 على شكل مجموع كسور وحدة مختلفة؟ الإجابة «نعم»، وإحدى طرق الحصول عليه سوف تقدم لك فرصة صقل معلوماتك الحسابية. ابدأ من الكسر المعطى، $\frac{m}{n}$، واطرح أكبر كسر وحدة ممكن. افعل نفس الشيء للباقي واستمر في تَكرار العملية. سوف يؤدي هذا إلى التحليل المطلوب. مثلًا نأخذ الكسر $\frac{9}{20}$. بطرح $\frac{1}{3}$ نحصل على الباقي $\frac{7}{60}$ ثم نطرح من هذا الباقي $\frac{1}{9}$ سوف نحصل على $\frac{1}{180}$ وبذلك نحصل على التحليل «المصري»:

$$\frac{9}{20} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{180}.$$

هذا النهج لطرح أكبر معكوس متاح فعلًا يؤدي إلى النتائج المطلوبة، لكنه قد لا يؤدي دائمًا إلى أقصر متتابعة ممكنة من كسور الوحدة كما نرى حتى في هذا المثال، لأن: $\frac{9}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

جرِّب بنفسك الطريقة على الكسور $\frac{5}{7}$ و$\frac{6}{13}$، وسوف يمكنك كتابة كل منها كمجموع لثلاثة من كسور الوحدة.

مجموعة كاملة من الأسئلة تطرحها هذه المسألة القديمة، وما زال علماء الرياضيات يكافحون من أجل الإجابة عنها حتى اليوم. وأبسط هذه الأسئلة هو: كيف نجد أكبر معكوس أصغر من كسر معين؟ سوف نجيب عن هذا في الفصل الخامس مع السؤال الأساسي: كيف نعرف أن هذه الطريقة صالحة؟ حتى تتوقف هذه العملية يجب الوصول إلى مرحلة حيث الباقي نفسه هو كسر وحدة. من المتصور أن هذا قد لا يحدث أبدًا، ونستمر في طرح المعكوسات إلى الأبد. ولكن تأكد أن هذا ليس صحيحًا، وسوف نرى في الفصل الخامس أن الكسر الحقيقي $\frac{m}{n}$ يمكن كتابته دائمًا كمجموع m أو أقل من كسور الوحدة المختلفة.

(٢) ماذا يحدث في حساب الكسور العشرية؟

التعبيرات المحتوية على عدد من الكسور مختلفة المقامات مزعجة. يمكننا التعامل مع كثرة المقامات بإيجاد المقام المشترك لكل الكسور. وهذا يسمح لنا بالتعامل مع أي مشكلة خاصة، لكن من اللطيف أن يكون هناك مقام واحد مشترك لجميع الكسور. وبالتأكيد لا

يوجد. يمكننا احتواء هذه الصعوبة باللجوء إلى الكسور العشرية. هذا يمكننا من عرض كل الكسور بطريقة موحدة. على أية حال، الثمن الذي ندفعه هو أن تمثيلنا للكسور — حتى البسيطة جدًّا منها — بصفة عامة يصبح لا نهائيًّا.

الجميع تقريبًا يعلم أن $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$. الطرف الأيسر لهذه المعادلة يمثل فكرة بسيطة: إنه كسر عادي، في حين أن الطرف الأيمن يحتوي على عملية لا نهائية — أي عملية تستمر إلى الأبد. إذا لم يكن هذا مزعجًا بما فيه الكفاية بالنسبة لك، فاضرب طرفي المعادلة في 3: فتحصل على: $1 = 0.99999\ldots$. لا يوجد خطأ هنا، لكنني وجدت الناس لا تحب هذا المظهر وفورًا يبدءون في الاحتجاج، ويصرون على أن الطرف الأيمن أقل بطريقة ما من الواحد. فأسألهم: أقل بكم؟ الإجابة عن هذا السؤال المزعج تكون أحيانًا باقتراح أن $0.999999\ldots$ يمثل العدد الذي يسبق 1 وأن العددَين يفصل بينهما مسافة متناهية في الصغر. هذا الكلام يبدو علميًّا أكثر، ولكن لا يوجد مثل هذا الرقم — لا يوجد رقم يسبق 1 مباشرة. بيد أننا في مواجهة شيء قد تكون أنت نفسك لم تلاحظه من قبل، وهو أن العدد الواحد يمكن كتابته ككسر عشري في صورتين مختلفتين. غير أن هذا شيء مزعج للغاية ويوجد نوع واحد فقط من الاستثناء هو أن الكسر العشري المنتهي مثل 2.364 هو نفسه يساوي $2.36399999\ldots$ أيضًا. هذا يدعونا إلى دراسة الصلة بين الكسور الاعتيادية وتمثيلها العشري. حتى إشعار آخر، سوف نتحدث عن الأعداد الموجبة فقط — واستخدام الأعداد السالبة مهم طبعًا وسوف نتكلم عنها لاحقًا، لكن ليس لها أي مساهمة في مسألة التمثيل العشري؛ ومن ثم لا يعنينا أمرها في الوقت الحالي.

يوجد نوعان من الكسور الاعتيادية: الحقيقية وغير الحقيقية. الكسر الحقيقي هو الكسر الذي يكون فيه البسط أصغر من المقام مثل: $\frac{2}{3}$ و$\frac{8}{17}$، ... إلخ. كل هذه الكسور تمثل أعدادًا بين 0 و1. أما الكسر الذي بسطُه أكبر من مقامه، مثل $\frac{25}{12}$ فيُسمَّى كسرًا غير حقيقي. في مثل هذه الحالة بقسمة البسط على المقام يمكننا التعبير عن الكسر كعدد مركب هو في هذه الحالة $2\frac{1}{12}$، وهو يتكون من عدد صحيح يتبعه كسر حقيقي. شكل العدد المركب للكسر مزعج عند استخدامه في الحسابات؛ ومن ثم فإنه يفضل استخدام التمثيل غير الحقيقي للكسر. ومع ذلك غالبًا ما يكون من الأفضل كتابةُ الإجابة النهائية لمجموع ما كعدد مركب لأنه يوضح قيمته، فمثلًا كتابة $\frac{47}{7}$ على الصورة $6\frac{5}{6}$ تخبرك بمجرد النظر أنك تتعامل مع مقدار بين 6 و7.

إذا فهمنا كل شيء حول التمثيل العشري للأعداد بين 0 و1. فسوف نفهم التمثيل العشري العام؛ لذلك دعونا نركز على الفترة من 0 إلى 1.

العدد النسبي هو العدد الذي يمكن كتابته على شكل كسر أو كما نقول أحيانًا على شكل نسبة بين عددين صحيحين. كما نعلم أنه يمكن أن يمثل كسران مختلفان نفس العدد، $\frac{1}{2}$ و$\frac{2}{4}$ مثلًا. مرة أخرى لدينا نفس العدد مكتوبًا بطريقتين مختلفتين؛ ومن ثم فنحن لا نقابل هذا النوع من الإزعاج في حالة التمثيل العشري فحسب. باختصارِ كلٍّ من البسط والمقام إلى أبسط صورة يمكن كتابة العدد النسبي في صورة كسر على الصورة $\frac{a}{b}$، حيث a وb ليس بينهما عامل مشترك غير الواحد. وبذلك يمكننا التفكير في الأعداد النسبية على أنها مجموعة جميع الكسور التي تم اختصارها بالطريقة السابقة.

ماذا يحدث عندما نكتب العدد النسبي في صورة كسر عشري؟ الإجابة هي أننا نحصل دائمًا على عدد عشري متكرر، أي عدد عشري يحتوي على كتلة من الأرقام المتكررة إلى ما لا نهاية بعد نقطة معينة في المفكوك. ونشير إلى ذلك بوضع نقطة فوق أول وآخر رقم من الكتلة، إليك بعض الأمثلة:

$$\frac{2}{3} = 0.666\ldots = 0.\dot{6}, \quad \frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots = 0.\dot{1}4285\dot{7},$$
$$\frac{1}{24} = 0.041666\ldots = 0.041\dot{6}, \quad \frac{1}{17} = 0.\dot{0}58823529411764\dot{7}.$$

قد تعتقد أنني قد نسيت بعض أصدقائك القدامى مثل $0.375 = \frac{3}{8}$ و$0.5 = \frac{1}{2}$، وهي الكسور العشرية المنتهية. ولكن هذا ليس حقيقيًّا: فالكسور العشرية المنتهية مثل تلك هي فقط مجرد حالات خاصة للتكرار، وأعني أن $0.5\dot{0} = \frac{1}{2}$ و$0.375\dot{0} = \frac{3}{8}$ ولكن بالطبع لا توجد حاجة لكتابة التكرار في هذه الحالة.

هناك العديد من الأسئلة التي يتعين الإجابة عنها:

(١) لماذا تؤدي الأعداد النسبية إلى تكرارات عشرية كما ادعيت الآن؟

(٢) أي الأعداد النسبية تؤدي إلى كسر عشري منتهٍ؟

(٣) ماذا يمكن أن يقال عن طول كتلة التكرار في المفكوك العشري؟ (في الأمثلة الأربعة السابقة أطوال كتلة التكرار كانت على الترتيب 1 و6 و1 و16.)

(٤) أيمكن تحويل كل عدد عشري متكرر إلى كسر مرة أخرى؟ وإذا كانت الإجابة نعم، فكيف؟

لمعرفة لماذا تؤدي الكسور إلى عدد عشري متكرر، من الأفضل النظر مرة أخرى إلى الطريقة التي تعلمتها لتحويل كسر مثل $\frac{5}{6}$ إلى عدد عشري:

$$\frac{5}{6} = 0.8333\ldots = 0.8\dot{3}.$$

الطريقة التي تعلمتها لفعل ذلك هي:

(١) قسمة 5 على 6 لا تصح، لذلك نكتب 0. (للإشارة إلى أن الكسر أقل من 1) ويتبقى معنا 5؛

(٢) قسمة 50 على 6 تساوي 8 والباقي 2؛ لذلك نكتب 8 ويتبقى معنا 2.

ما حدث هنا هو أننا عالجنا 5 وكأنها $\frac{1}{10} \times 50$، فبقسمة 50 على 6 تكون النتيجة 8 (ويعني $\frac{8}{10}$ بالطبع) والباقي 2، وتمثل بـ $\frac{2}{10}$، ويظل علينا أن نقسمها على 6 ونتعامل مع $\frac{2}{10}$ باعتبارها $\frac{1}{100} \times 20$ في الخطوة التالية من القسمة:

(٣) وقسمة 20 على 6 تساوي 3 ويتبقى 2؛ فنكتب 3 ويتبقى معنا 2.

في هذه المرحلة أثبتنا أن $\frac{5}{6} = 0.83 + \left(\frac{2}{100} \div 6\right)$، ونستمر في العمل على هذا الباقي بنفس الطريقة. طبعًا في هذه الحالة، لن يكون الباقي أبدًا صفرًا؛ ومن ثَمَّ فإن العملية تستمر إلى الأبد. على أية حال لأن كل البواقي تساوي 2 من هذه النقطة فصاعدًا، ولأنه كتب علينا تكرار هذا الحساب البسيط مرات عديدة، فنحصل على:

$$\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}.$$

يمكننا الآن إجابة سؤالنا الأول. عند تحويل الكسر $\frac{m}{n}$ إلى كسر عشري، قد يكون كسرًا عشريًّا منتهيًا أو لا. إذا لم يكن منتهيًا، فإن الباقي بعد كل مرحلة في القسمة يجب أن يكون أحد الأعداد 1 و2 و... و$n - 1$. وبما أن هناك $n - 1$ من الاحتمالات فقط، فإن الباقي لا بدَّ أن يتكرر في مكان ما من الخطوات n الأولى. إلى أن يظهر الباقي للمرة الثانية فإننا مجبرون على تَكرار نفس الدورة من البواقي التي لدينا بالضبط. هذه الدورة طبعًا تنتهي بنفس الباقي الذي تكرر للمرة الثانية ونكون قد وقعنا في هذه الحلقة إلى الأبد.

فمثلًا $\frac{1}{7}$ هو كسر عشري غير منتهٍ: فالبواقي الممكنة التي نقابلها عند إجراء القسمة هي الأعداد 1 إلى 6، وبالفعل فجميعها تظهر. عند قسمة 1 على 7، دورة البواقي

هي: 1، 3، 2، 6، 4، 5، 1، 3، 2، ... وهكذا يتضح أن طول كتلة التكرار هو ستة أرقام.

هذا يجيب عن السؤال الأول وأيضًا يقطع شوطًا في سبيل الإجابة عن السؤال الثالث: ما طول كتلة التكرار؟ إذا كان المقام هو n، فإن طول كتلة التكرار سيكون على الأكثر $n - 1$. هذا الطول الأقصى الممكن يظهر في بعض الأحيان — الكسور التي مقامها 7 أو 17 يكون طول كتلة التكرار فيها هو على الترتيب 6 أو 16 كما رأينا فعلًا. ومع ذلك، فقانون مورفي لا ينطبق؛ حيث إن الأوضاع ليست أسوأ ما يمكن دائمًا، حتى لو كان المقام عددًا أوليًّا: $\frac{1}{11} = 0.\dot{0}\dot{9}$. وهي كتلة تكرار طولها رقمان فقط، وكذلك $\frac{1}{13} = 0.\dot{0}7692\dot{3}$، وهي كتلة تكرار طولها ستة أرقام فقط. وهناك الكثير عن الطول r لكتلة التكرار في التمثيل العشري للكسر $\frac{m}{n}$. فما دام n وm ليس بينهما عامل مشترك فإن r تعتمد على n وليس على m. ويمكن وصف قيمة r نفسها بطرق أخرى، ولكنها ليست بسيطة كما قد تتمنى؛ إذ لا يوجد قاعدة عامة سريعة لإيجاد r من قيمة n.

من ناحية أخرى، فإن السؤال الثاني الخاص بمعرفة أي الكسور تؤدي إلى كسور عشرية منتهية؛ أكثر سهولة في الإجابة عنه. نحن نعلم أن $\frac{1}{2} = 0.5$ و$\frac{1}{5} = 0.2$، وأن 2 و5 هما عوامل للعدد 10، وهو أساس نظامنا العددي. والآن إذا أخذنا كسرَين عشريَّين منتهيَّين، فيمكننا ضربهما معًا، وستكون النتيجة كسرًا عشريًّا منتهيًا آخر. ولعلك تتذكر أنه إذا كان العدد الأول لديه عدد r من الخانات العشرية والعدد الثاني لديه عدد s منها، فإن حاصل ضرب العددين لن يحتوي على أكثر من $r + s$ من الخانات العشرية؛ فمثلًا $0.202 \times 0.01744 = 0.00352288$ توضح مثالًا على أنه عندما يكون $r + s = 3 + 5 = 8$، فإن حاصل ضرب العددين سينتهي بعد ثماني خانات من العلامة العشرية. ويترتب على ذلك أن أي عدد هو حاصل ضرب $\frac{1}{2}$ و$\frac{1}{5}$ لأي عدد من المرات، بمعنى أن مقامه يساوي حاصل ضرب أي عدد من 2 و5، سيكون له تمثيل عشري منتهٍ. على سبيل المثال:

$$40 = 2^3 \times 5 \quad \text{and} \quad \frac{1}{40} = 0.025; \quad 16 = 2^4 \quad \text{and} \quad \frac{1}{16} = 0.0625.$$

إليك ما هو أكثر: أي مضاعف لكسر عشري منتهٍ سيكون أيضًا منتهيًا؛ فمثلًا $\frac{7}{40} = 0.175$. والسبب في ذلك أن ضرب الكسر العشري المنتهي في عدد صحيح لن يزيد عدد العناصر غير الصفرية (الخانات العشرية) بعد العلامة العشرية (على الرغم من أنه قد يُنقصها، فمثلًا: $0.25 \times 2 = 0.5$).

وربما كان إثبات العكس أكثر بساطة: فالكسر العشري المنتهي يمكن كتابته على صورة كسر اعتيادي، حيث المقام هو حاصل ضرب مضاعفات 2 و5. حيث إن أي كسر عشري منتهٍ يكتب فورًا على صورة كسر اعتيادي مقامه قوى العدد 10. فمثلًا:

$$0.255 = \frac{255}{1000} = \frac{51}{200}.$$

في هذا المثال المقام هو:

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5^3.$$

طبعًا من الممكن اختصار الكسر كما حدث هنا، لكن المقام يظل حاصل ضرب الأعداد 2 و5 بمعنى أن: ($200 = 2^3 \times 5^2$).

ها قد وصلنا إلى وصفٍ كامل للكسور الاعتيادية التي تعطي كسورًا عشرية منتهية:

> الكسر $\frac{m}{n}$ يكون له تمثيل عشري منتهٍ، إذا وفقط إذا، كانت n على الصورة $n = 2^a 5^b$، بمعنى، إذا وفقط إذا، كان مقام الكسر هو حاصل ضرب مضاعفات العددين 2 و5. (وهذا يتضمن أيضًا المقامات على صورة مضاعفات العدد 2 فقط أو مضاعفات العدد 5 فقط مثل $\frac{1}{16}$ أو $\frac{1}{25}$.)

الأعداد 2 و5 هي أعداد خاصة لأنها عوامل للعدد 10، وهو أساس نظام الأعداد الذي نستخدمه. فإذا كنا سوف نغير أساس نظام الأعداد، فإن فئة الكسور العشرية المنتهية سوف تتغير أيضًا معه. فمثلًا: في حالة الأساس 3. (معروف باسم نظام الأعداد الثلاثي) فالكسر $\frac{1}{3}$ هو كسر منتهٍ؛ حيث إن في النظام الثلاثي سيكون تمثيله هو 0.1 حيث 1 هنا تعني $\frac{1}{3} \times 1$ وليس $\frac{1}{10} \times 1$.

دعونا الآن نتناول السؤال الرابع. سوف أوضح كيف نغير أي كسر عشري متكرر إلى كسر اعتيادي. هذه التقنية الخاصة يبدو أنها لا تُعلَّم دائمًا في المدارس، وهذا أمر مخجل، حيث إنها طريقة بسيطة وأيضًا ذكية. بعض الأمثلة ستكون كافية لتوضيح الطريقة.

دعنا نجرب $0.\dot{6}\dot{3}$. طول كتلة التكرار r هنا هو 2؛ ومن ثم نضرب العدد، ولنرمز له بـ a، في $100 = 10^2$ والآن $0.\dot{6}\dot{3} = 0.636\dot{3}$ ومن ثم هذا يؤدي إلى $100a = 63.\dot{6}\dot{3}$ الفكرة هنا أنه بما أن كلًّا من $100a$ وa لهما نفس المفكوك بعد العلامة العشرية، فهذا يثبت أن

$a + 63 = 100a$ وبطرح a من الطرفين نحصل على $99a = 63$ أي إن: $a = \frac{63}{99}$. وفي النهاية بعد الاختصار نحصل على:

$$0.\dot{6}\dot{3} = \frac{7}{11}.$$

من الأفضل الآن أن تجرب بعضًا من هذه بنفسك. استخدم نفس التقنية لاختبار أن $\frac{2}{11} = 0.\dot{1}\dot{8}$ و$\frac{1}{27} = 0.\dot{0}3\dot{7}$. (سوف تحتاج هنا للضرب في 1000.)

سوف يظهر تغيير بسيط عندما نأخذ مثالًا مثل $a = 0.2\dot{7}$. وفي هذه الحالة تكون $r = 1$؛ ومن ثم نحن نحتاج إلى الضرب في 10 فقط لنحصل على $10a = 2.\dot{7}$. بالطرح نحصل على $9a = 2.\dot{7} - 0.2\dot{7}$ في هذه المرة العددان متطابقان بداية من الخانة الثانية بعد العلامة العشرية؛ ومن ثم هذه الأجزاء يحذف بعضها بعضًا ونحصل على $9a = 2.7 - 0.2 = 2.5$. وبضرب الطرفين في 10 للحصول على معادلة تحتوي على أعداد صحيحة فقط، سيصبح لدينا $90a = 25$ ومنها $a = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$.

فيما يلي مثال آخر للتجربة: أثبت أن $\frac{7}{12} = 0.58\dot{3}$.

في الختام، يمكننا تمثيل أي كسر اعتيادي في صورة كسر عشري متكرر (تذكر أن الكسور العشرية المنتهية تنتمي أيضًا إلى هذه الفئة)، والعكس صحيح، ومن ثَم إيجاد تناظر بين الأعداد النسبية والكسور العشرية المتكررة. قطعًا من السهل إنتاج كسور عشرية ليست متكررة. فعلى سبيل المثال، في العدد

$$b = 0.1010010001000010000001\ldots$$

يوجد نمط في هذا المفكوك العشري، لكنه ليس كسرًا عشريًّا متكررًا. ونستنتج من ذلك أن b ليس عددًا نسبيًّا — أي لا يمكن كتابته كنسبة بين عددَين صحيحَين. الأعداد مثل b، تُعرف بأنها أعداد غير نسبية، ومن السهل جدًّا إيجادها. فمثلًا هل يمكنك أن تعرف لماذا يعتبر العدد $0.12345678910111213141516\ldots$ عددًا غير نسبي أيضًا؟

(٣) اللانسبية في الهندسة

ليس من الصعب توليد أعداد على آلتك الحاسبة ليس لها مفكوك عشري متكرر. جرب $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$. هذا العدد يتطلب بعض التفكير. كيف نعرف أن $\sqrt{2}$ ليس له

مفكوك عشري متكرر؟ قد يكون طول كتلة التكرار به مئات من الأرقام، أو إن التكرار لا يبدأ حتى بعد مليون من الخانات العشرية. بعبارة أخرى؛ قد يكون العدد نسبيًّا رغم كل شيء.

يقال إن الفيثاغورثيين في القرن السادس قبل الميلاد كانوا ينزعجون بشدة بشأن أعداد من أمثال العدد $\sqrt{2}$. ومن المؤكد أنهم لم يكونوا ليسعدوا بطريقتنا في فعل الأشياء. فعلى أية حال، إذا لم يكن بإمكاننا كتابة $\sqrt{2}$ على صورة كسر، فما معناه إذن؟

في نهجنا، من خلال مفكوك الكسور العشرية، يؤدي موقفنا الفلسفي إلى ما يلي. نحن نقول إن العدد حقيقيٌّ إذا أثبتنا أنَّ له مفكوكًا عشريًّا. ولهذا السبب $\sqrt{2}$ هو عدد حقيقي لأنه يمكننا إيجاد المفكوك له لأي عدد من الخانات العشرية كما يلي. نبدأ بملاحظة أن $2^2 > 2 > 1^2$ ومن ثم بأخذ الجذر التربيعي نجد أن $2 > \sqrt{2} > 1$ أي إن العدد $\sqrt{2}$ يقع بين 1 و2 أي إن $\sqrt{2} = 1. \ldots$ ثم نلاحظ أن: $1.5^2 = 2.25 > 2 > 1.96 = 1.4^2$ وهكذا فإن $1.5 > \sqrt{2} > 1.4$. يمكننا أن نستمر بهذه الطريقة للخانة الثانية والثالثة العشرية. ويمكنك أن تتحقق من أن $1.42 > \sqrt{2} > 1.41$ و$1.415 > \sqrt{2} > 1.414$ وهكذا. بشكل مبدئي لا يوجد حدٌّ لعدد الخانات التي يمكن أن نَحسُب بها العدد $\sqrt{2}$؛ ومن ثم فإنه وَفقًا لطريقتنا في التفكير $\sqrt{2}$ هو عدد حقيقي، حتى لو ظهر أن هذا العدد غير نسبي. (بالتأكيد، توجد طرق أكثر كفاءة لاستخراج الجذور التربيعية من هذه الطريقة الساذَجة، ولكنها كافية لتوضيح الفكرة.)

من قراءاتي، أعتقد أن الفيثاغورثيين لم يكونوا ليقبلوا بأيٍّ من هذا. فقد كانوا يؤمنون بالبساطة ويرتابون في أي عملية غير محدودة مثل العملية التي انغمسنا فيها توًّا. إنهم لم يكونوا ليقبلوا أن شيئًا نجَم عن عملية حسابية غير منتهية يمكن أن يتمتع بنفس وضع الأعداد النسبية العادية التي آمنوا بها بشدة وشكلت حجر الزاوية في فلسفتهم. ومع ذلك، فقد اعتقدوا في $\sqrt{2}$ أيضًا، ولكن لأسباب مختلفة تمامًا. فبالنسبة لهم $\sqrt{2}$ كان عددًا ذا معنًى لأنه يمكن تكوينه. ولشرح وجهة نظرهم، نحتاج إلى تبني نهج هندسي.

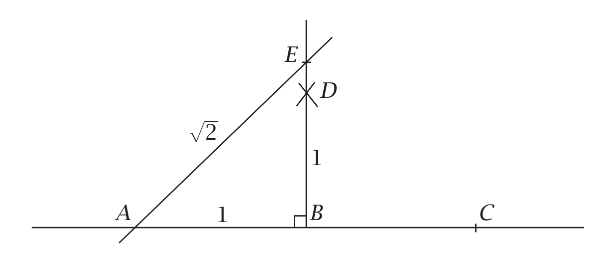
نظرية فيثاغورث هي حقيقة بسيطة تخص أي مثلث قائم الزاوية. إذا كان طولا الضلعين الأقصر هما a وb وكان طول الوتر هو c فإن النظرية تقول $a^2 + b^2 = c^2$. وكحالة خاصة إذا أخذنا $a = b = 1$ فسنحصل على $c^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$. ومن ثَم فإن طول الضلع الأطول في المثلث هو $c = \sqrt{2}$. اليونانيون علموا أن مثل هذا المثلث يمكن تكوينه دون استخدام أداة لقياس الطول أو الزاوية، ولكن ببساطة باستخدام

حافة مستقيمة وفرجار. وفي وجهة نظرهم أن هذا يعني أن الأعداد المتكونة مثل $\sqrt{2}$ تتمتع بوجودٍ ماديٍّ طبيعي اعتبروه ذا أهمية خاصة.

دعونا نرَ كيف يتكون العدد $\sqrt{2}$. إن قول إن العدد a يمكن إنشاؤه أو تكوينه يعني أنه، بمعلومية أي قطعة مستقيمة لاستعمالها كمعيار لوحدة الطول، توجد مجموعة من العمليات المتتابعة التي يمكن القيام بها باستخدام حافة مستقيمة (ليست مسطرة مقسمة، بل مجرد حافة مستقيمة) وفرجار تؤدي إلى قطعة مستقيمة أخرى لها الطول a. لتكوين المثلث القائم الزاوية والمتساوي الساقين الذي ذكرناه سابقًا، يمكن أن تقوم بما يلي. (المثلث المتساوي الساقين يعني أن طولَي ضلعين من أضلاعه متساويان؛ ومن ثَم فإن هناك زاويتَين في المثلث أيضًا متساويتَين.)

لديك قطعة مستقيمة ولها نهايتان A وB لتستخدم كوحدة عيارية للطول. مد القطعة المستقيمة من جهة B واستخدم الفرجار لتحديد النقطة C على يمين النقطة B بحيث يكون طولا AB وBC متساويَين (كما في الشكل ٢-١).

افتح الفرجار أكثر وارسُم قطعةً من قوس دائرة مركزها النقطة A ودون تغيير فتحة الفرجار، افعل نفس الشيء من النقطة C. الدائرتان اللتان قمت برسمهما سوف تتقاطعان أعلى وأسفل النقطة B: لتكن النقطة D، هي نقطة التقاطع أعلى B. ارسُم الخط من B إلى D. بالتماثل الزاوية ABD هي زاوية قائمة. استخدم الفرجار، مرة أخرى، لتحديد طول مساوٍ لـ AB على الخط الواصل بين B وD. فَلْنسمِّ هذه النقطة النهائية E، وهي تعتبر، وَفقًا لهذا التكوين، الرأس الثالث للمثلث القائم الذي أطوال أضلاعه 1 (الضلع AB) و1 (الضلع BE)، وطبقًا لنظرية فيثاغورث $\sqrt{2}$ (الضلع AE).



شكل ٢-١

حقيقة أنه تبيَّن أن $\sqrt{2}$ عددٌ غير نسبي، أحدثت اضطرابًا في طريقة تفكير الفيثاغورثيين. حتى إن هناك بعض القصص عن حدوث تهديدات بالقتل أو جرائم

قتل فعلية لإيقاف هذه الأخبار السيئة للغاية. وهذا يعتبر غير منطقي وفقًا لطريقتنا في التفكير، وحيث إنه قد مرَّت آلاف السنين بين حياة هؤلاء الناس وحياتنا، فإن هذه القصص لا تثير لدينا سوى السخرية. دعنا نرَ لماذا من المستحيل أن يكون كتابة $\sqrt{2}$ مساوية لكسر اعتيادي. سوف نستخدم أسلوب المعارضة؛ بمعنى أننا سوف نفترض العكس، ثم نبحث عما يعارض ذلك.

فلنفترض، على عكس ما نريد إثباته، أن $\sqrt{2}$ هو العدد النسبي $\frac{a}{b}$، حيث لا يوجد عامل مشترك بين a وb. بتربيع طرفَي المعادلة $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ نحصل على $\frac{a^2}{b^2} = 2$، التي تعني بالتبعية أن

$$2b^2 = a^2.$$

لاحظ أن الطرف الأيسر مضاعف للعدد 2؛ أي إنه عدد زوجي، ومن ثَم a^2 هو أيضًا عدد زوجي. وهذا بالتبعية يعني أن a نفسها عدد زوجي. (حاصل ضرب أيِّ عددَين فرديَّين هو أيضًا عدد فردي؛ لذلك إذا كان a عددًا فرديًّا فإن a^2 سيكون فرديًّا.) ومن ثم يمكن كتابة $2c$ بدلًا من a، حيث c عدد صحيح. ومنها فإن:

$$2b^2 = (2c) \times (2c) = 4c^2.$$

وعند حذف العدد المشترك 2 من طرفي هذه المعادلة نحصل على: $b^2 = 2c^2$. هل تستطيع رؤية العقبة القادمة؟ باستخدام نفس المنطق السابق نستنتج أن b تمامًا مثل a لا بدَّ أن يكون عددًا زوجيًّا. ولكن هذا يناقض الفرض الأصلي أن a، b ليس بينهما عامل مشترك؛ أي إن فكرة كتابة $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ أدَّت إلى نتيجة خاطئة وهي أن كلًّا من a وb مضاعف للعدد 2. ولم يتبقَّ لنا خِيارٌ سوى أن نعترف بأنه لا يمكن كتابة $\sqrt{2}$ على صورة كسرٍ اعتياديٍّ. على الرغم من ذلك، فسوف أثبت في الفصل التاسع أنه من الممكن كتابة $\sqrt{2}$ كمفكوك مكرر من نوع آخر.

الرياضيات الحديثة ممتعة بنتائجَ من هذا النوع. فهي تثبت لنا أنه يوجد في العالم ما هو أكثر من مجرد النسبة بين الأعداد الصحيحة. كان القدماء يطمحون بشغف إلى الوصول إلى نظام فلسفي يشمل كل شيء، ومن ثَم كانت خيبة أملهم مريرة بسبب الاكتشافات الجديدة التي انتهكت معتقداتهم. ولا يزال هناك منَّا مَن يبحث عن صورة كاملة للكون، ولكن هذا التوجُّه يعيق التقدم أكثر مما يساعد عليه. فقد ازدهرت جوانب

جديدة للعلم، مرة تلو الأخرى فقط عندما استرخى الناس وتابعوا الأفكار الجديدة دون موانع ودون تحيُّز أو دون الحاجة إلى تبرير ما يفعلونه من وجهة نظر فلسفةٍ ما، سواء أكانت دينية أم علمانية.

بمجرد تحديد عدد غير نسبي واحد، تفتح بوابات الفيضان لأنك تستطيع أن تولد فورًا عددًا كبيرًا لا نهائيًّا من الأعداد غير النسبية. فلنفترض أن x عدد غير نسبي. (يمكن أن تأخذ $x = \sqrt{2}$ إذا رغبت.) عندئذٍ، بالنسبة لأي عدد نسبي $\frac{a}{b}$ سواء كان موجبًا أو سالبًا فإن العدد $x + \frac{a}{b}$ يكون عددًا غير نسبي أيضًا؛ لأنه إذا حدث العكس وكان يساوي عددًا نسبيًّا $\frac{c}{d}$، فسوف نحصل على:

$$x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{(bc - ad)}{bd},$$

وهو عدد نسبي في حد ذاته، وهو ما يناقض فرض أن x عدد غير نسبي. نفس الشيء يحدث إذا ضربنا x في عدد نسبي $\frac{a}{b}$. ما دام a ليست 0 فإن حاصل الضرب لا يمكن أن يكون عددًا نسبيًّا $\frac{c}{d}$؛ لأن هذا سوف يؤدي مرة أخرى إلى أن x يساوي عددًا نسبيًّا (النقطة بين الأعداد تعني الضرب):

$$\frac{a}{b} \cdot x = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}.$$

بشكل خاص، الأعداد $\sqrt{2} + 1$ (بجمع 1) و$\frac{\sqrt{2}}{3}$ (بالضرب في $\frac{1}{3}$) هي أعداد غير نسبية اعتمادًا على عدم نسبية $\sqrt{2}$.

الشيء الجدير بالملاحظة أنه من الممكن جدًّا جمع عددين غير نسبيين موجبين أو ضربهما وتحصل على عدد نسبي. مثلًا $2\sqrt{2}$ و$\sqrt{2}$ هما عددان موجبان غير نسبيين، لكن $2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \times 2 = 4$. وبنفس الطريقة $2 - \sqrt{2}$ و$\sqrt{2}$ كلاهما عدد غير نسبي، ولكن مجموعهما 2.

الأكثر غرابة، يوجد برهان وجيه يثبت أن هناك عددَين غير نسبيَّين a وb بحيث إن a^b يكون عددًا نسبيًّا. سوف نثبت هذا، على الرغم من أننا لن نستطيعَ إيجاد العددين a وb فعلًا! وسوف أُذكِّرك أولًا بطريقة التعامل مع الأسس.

(٤) الأسس واللوغاريتمات والأعداد غير النسبية

أول قوانين الأسس هو $a^n \times a^m = a^{n+m}$. وهذا واضح إذا لاحظت أن الأس n والأس m هما عدد العوامل في حاصل الضرب، فمثلًا:

$$a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a),$$

وهذا يعني أن a يُضرب في نفسه $2 + 3 = 5$ من المرات. بنفس الطريقة يمكننا إيجاد معنى القانون الثاني للأسس من خلال الحذف: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$، فمثلًا:

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{(a \times a \times a \times a \times a)}{(a \times a)} = a^{5-2} = a^3.$$

وأخيرًا القانون الثالث للأسس هو بالمثل عبارة حسابية: $(a^n)^m = a^{nm}$ فمثلًا:

$$\left(a^2\right)^3 = (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) = a^{2\times 3} = a^6.$$

هذا المعنى ينسحب أيضًا على القوى (الأسس) الصحيحة غير الموجبة وذلك بالإصرار على أن هذه القوانين صحيحة دائمًا، فمثلًا نعني بالعدد $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ لأن:

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a = a^1,$$

وهكذا وبمثل هذا التوضيح:

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a,$$

الذي يتوافق مع القانون الأول. العدد a^{-1} يعني العدد $\frac{1}{a}$ لأن هذا متوافق مع استخدام القانون الثاني في أوضاع مثل:

$$\frac{a}{a^2} = \frac{1}{a};$$

طرح الأسس هنا يؤدي إلى أس $1 - 2 = -1$. القانون الثاني يتطلب أيضًا أن نأخذ $a^0 = 1$ للتوافق مع حقيقة أن $\frac{a^2}{a^2} = 1$ لأن طرح الأسس هنا يؤدي إلى أس $2 - 2 = 0$.

بالنظر إلى قوانين الأسس، يمكننا أن نثبت أنه لا بدَّ من وجود عددين غير نسبيين a وb، بحيث a^b عدد نسبي. أولًا نأخذ الحالة $a = b = \sqrt{2}$. العدد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ إما أن يكون نسبيًّا أو لا. فإذا كان العدد نسبيًّا فهذا هو المطلوب. من جهة أخرى إذا كان هذا العدد غير نسبي (وهذا قد يكون الاحتمال الأكثر توقعًا بالنسبة لك) نضع $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ و$b = \sqrt{2}$. فيكون العددان غير نسبيين؛ ومع ذلك باستخدام القانون الثالث للأسس نحصل على:

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2.$$

ومن ثَم في كلا الحالتَين فإن الأعداد غير النسبية موجودة.

الشيء المُلاحَظ في هذا البرهان أنه أعطى بديلَين، واستنتج أن أحدهما يقود إلى نموذج لزوج من الأعداد لهما الخاصية المطلوبة، ولكنه لا يُقدِّم أي فكرة عن أي عددين يحققان ذلك. لهذا السبب فإن كثيرًا من الناس، ومن بينهم بعض علماء الرياضيات، يعتبرون هذا البرهان عمليًّا لا قيمة له. لكن هذا لا يزعجني.

حيث إننا استغرقنا وقتًا لمراجعة قوانين الأسس، فلدينا فرصة عرض بعض من خواص اللوغاريتمات، وهو موضوع غالبًا ما سيكون القراء الأكبر سنًّا قد تعرَّفوا عليه بإسهاب خلال المرحلة الثانوية.

التعريف بسيط: إذا كان $y = 10^x$ فنقول إن x هي لوغاريتم y للأساس 10 ونكتب $x = \log_{10} y$ نستطيع إبدال أي أساس آخر بالأساس 10، لكننا لسنا في حاجة لفعل ذلك هنا، وسوف نستخدم فقط الأساس 10 ونكتب $x = \log y$ ليعني أن $y = 10^x$؛ فمثلًا $\log 1000 = 3$ لأن $10^3 = 1000$ و$\log 0.1 = -1$ لأن $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$.

إن الخاصية السحرية التي تميزت بها اللوغاريتمات وأدَّت إلى ثورة علمية، هي أنها حولت عمليات الضرب والقسمة إلى جمع وطرح؛ لأن:

$$\log ab = \log a + \log b; \quad \log\left(\frac{a}{\mathrm{b}}\right) = \log a - \log \mathrm{b}.$$

قد سمح لنا ذلك بإجراء عمليات الضرب والقسمة الصعبة بدقة عالية: لضرب العددين a وb، علينا فقط أن نبحث عن لوغاريتمَي العددين، ثم نجمعهما، ونوجِد العدد الذي لوغاريتمه هذا المجموع؛ أي نحصل على معكوس اللوغاريتم. هذه الخواص هي نتيجة بسيطة لتعريف اللوغاريتم وقوانين الأسس. فمثلًا خاصية الجمع تنشأ من القانون الأول

للأسس. سوف نكتب x وy للعددين $\log a$ و$\log b$ على الترتيب. فيكون:

$$a = 10^x, \quad b = 10^y \quad \text{and so} \quad ab = 10^x 10^y = 10^{x+y}$$

ومن ثم فإن: $\log ab = x + y = \log a + \log b$ بالمثل خاصية الطرح تنشأ من القانون الثاني، في حين أنه عند شرح القانون الثالث، نحصل على الخاصية الإضافية أن: $\log(x^y) = y \log x$ ومن ثم، فمثلًا:

$$\log \sqrt{10} = \log \left(10^{1/2}\right) = \frac{1}{2} \log 10 = \frac{1}{2}.$$

كل ما هو مطلوب بشكل حاسم ونهائي هو جدول اللوغاريتمات للأعداد بين 1 و10 وبعد ذلك يمكن فعلًا الحصول على لوغاريتم أي عدد؛ لأن أي عدد خارج النطاق 10−1 يمكن التعامل معه بقوانين اللوغاريتمات. على سبيل المثال:

$$\log 84 = \log(10 \times 8.4) = \log 10 + \log 8.4 = 1 + \log 8.4 = 1.9243.$$

ولعلك تتذكر أن هذين الجزأين للوغاريتم، $\log 10$ و$\log 8.4$ معروفان باسم الكسر العشري للوغاريتم والعدد البياني المميز للوغاريتم على التوالي.

كانت اللوغاريتمات هي أهم الوسائل العملية منذ فترة ليست بعيدة، وكانت المسطرة الحاسبة هي التمثيل المادي لها. وهذه الأداة عبارة عن مسطرة مدرجة لوغاريتميًّا بدقة فائقة لجمع وطرح اللوغاريتمات. وكانت المسطرة الحاسبة الجيدة قطعة هندسية جميلة. فإذا كنت لا تزال تحتفظ بواحدة فربما يكون من الحكمة أن تحافظ عليها فقد تصبح من الأشياء العالية القيمة التاريخية.

لم تَعُد التقنيات المستخدمة في اللوغاريتمات تدرس اليوم على الإطلاق لأن الغرض الأساسي منها كان عمليًّا؛ ومن ثم فقد أضحت عديمة القيمة بظهور الآلات الحاسبة التي تستطيع القيام بالعمل بدقةٍ وبسرعةٍ أكبر. على أية حال، هناك خسارة حقيقية صاحبَت اختفاء الجداول اللوغاريتمية. فتَكرار الرجوع إلى صفحات جداول اللوغاريتمات والدوال المثلثية كان يولد إتقان سلوك الدوال نفسها. والأكثر من ذلك، أن هذه الطريقة كانت تلجأ

إلى استخدام القياس والاستقراء الداخلي (بمعنى تقدير قيم وسيطة لم تُكتب صراحةً في الجدول) ومن ثَم كان المستخدمون يحتاجون إلى الاحتفاظ بمهاراتهم الرياضية لدرجة يفتقدها الطلاب الذين يعتمدون على الآلات الحاسبة في الوقت الحالي؛ فبمجرد أن تختصر المسألة إلى تطبيق للآلة الحاسبة، يصبح الطلاب سلبيين نسبيًّا، ويتعلمون بدرجة أقل، ويوافقون على أي نتيجة تظهر على شاشة الآلة الحاسبة دون أي استفسار.

وجدير بالذكر أن الدالة اللوغاريتمية ما زالت مُهمَّةً في العلوم. فكثير من المقاييس الطبيعية هي لوغاريتمية الأساس، فمقياس الحموضة pH، ومقياس ريختر للزلازل، ومقياس الصوت ديسيبل؛ هي ثلاثة من كثير. بالإضافة إلى أن اللوغاريتم الطبيعي يظهر بشكل تلقائي في حساب التفاضل والتكامل؛ اللوغاريتم للأساس $e = 2.7182\ldots$، والعدد e هو عدد غير نسبي يظهر في مسائل خاصة بالربح المركب. ومن ثم فطلاب العلوم ما زالوا في حاجة إلى دراية شاملة بحساب اللوغاريتمات، وهم يعانون بفقدهم التدريب العملي التقليدي الذي تقدمه جداول اللوغاريتمات.

اختراع اللوغاريتمات كان دفعًا قويًّا للعلوم في مستهل القرن السابع عشر والفضل يعود بالدرجة الأولى إلى الاسكتلندي جون نيبير. ومع ذلك لم يكن تطورها مباشرًا كما هو متوقَّع. كانت لوغاريتمات نيبير الأصلية أقرب ما تكون إلى ما يُسمَّى باللوغاريتمات الطبيعية المشار إليها سابقًا. وعلاوة على ذلك، كان ثمة تقنيات موازية تُستخدَم مِن قِبل عالِمَي الفلك براهي وكيبلر في الدنمارك، في نفس الوقت، للقيام بحسابات صعبة جدًّا على مدار كوكب المريخ باستخدام تقنية تحتوي على متطابقات من حساب المثلثات وتخدم في التعبير عن حاصل الضرب كمجموع. وقد أصبحت أهمية هذه المتطابقات موضع تقدير في أوروبا خلال القرن السادس عشر، بينما اكتشفت القواعد نفسها في الشرق الأوسط في فترة ترجع إلى القرن الحادي عشر.

بما أننا نتحدث في موضوع الأعداد غير النسبية، فمن الإنصاف أن نذكر أن إحدى صعوبات اللوغاريتمات تكمن في أن لوغاريتم العدد النسبي هو عدد غير نسبي، إلا إذا كان قوةً للعدد 10. فمثلًا من السهل رؤية ذلك للعدد $\log 3$: مرة أخرى سوف نستخدم البرهان بالتناقض. نفترض أن $\log 3$ يساوي الكسر $\frac{a}{b}$ وهذا يعني أن $3 = 10^{a/b}$ وبرفع طرفي هذه المعادلة للقوة b نحصل على $3^b = 10^a$. ولكن هذا غير ممكن لأن الطرف الأيسر عدد فردي بينما الطرف الأيمن عدد زوجي.

(٥) الأعداد غير النسبية هي القاعدة

على الرغم من أنه توجد عبارات كثيرة جدًّا صائبة في العالم، فنحن جميعًا نعرف أن الصواب أصعب كثيرًا في الوصول إليه من الخطأ. وبالطريقة نفسها، الأعداد غير النسبية أكثر شيوعًا بكثير جدًّا من الأعداد النسبية، عندما يتعلق الأمر بالأعداد الاعتباطية. وهذا لا ينبغي أن يؤخذ على أنه ملاحظة غير هامة تخص الأعداد غير النسبية، ولكن مجرد وسيلة لتوصيل فكرة أنه على الرغم من وجود أعداد كثيرة جدًّا لا حصر لها نسبية، فإن كون العدد نسبيًّا يمكن أن ينظر إليه بصدق على أنه استثناء.

إذا فكرنا في الأعداد فيما يتعلق بالمفكوك العشري، فسيصبح واضحًا لدينا أن الأعداد غير النسبية التي لها مفكوك غير متكرر يجب أن تكون أكثر شيوعًا من الأعداد النسبية التي لها مفكوكات عشرية متكررة. يوجد برهان بسيط على ذلك بتخيل توليد عدد عشري عشوائي بطريقة ما (بالتقاط الأرقام من قبعة مثلًا). إن احتمال أن يقع المفكوك العشري في نمط كتلة تكرِّر نفسها — لا لعددٍ كبير من المرات فحسب، وإنما للأبد — لا بدَّ أن يكون احتمالًا صفريًّا. وهذه بالفعل فكرة حَدْسيَّة سليمة، ولكنها تحتاج إلى بعض الجهد لتصبح دقيقة. تكمن الصعوبة في أن البرهان ملتبسٌ في مفهوم المحدودية (النهائية) واللامحدودية (اللانهائية)؛ إذ نسمح لأنفسنا بالكلام عن نتيجة عملية لا نهائية وكأننا فعلًا نفذناها.

ربما يستند تفنيد هذا البرهان إلى ملاحظة أن كلتا المجموعتين من الأعداد، سواء النسبية أو غير النسبية، مجموعتان لا نهائيتان؛ ومن ثم فإن من غير المنطقي أن نقول إن إحداهما أكبر من الأخرى. وتعتمد هذه النتيجة على افتراض أن جميع المجموعات اللانهائية هي في الأساس متساوية؛ وهي فكرة لا تستطيع الصمود أمام التدقيق الجاد.

كان جاليليو أول من أوضح الطبيعة الغريبة للمجموعات اللانهائية. فالمجموعة اللانهائية يمكن تقسيمها إلى جزأين كلاهما لا نهائي ويمكن وضعهما في تناظر أحادي مع المجموعة الأصلية. فمثلًا لا نحتاج إلى النظر أبعد من المجموعة N للأعداد الطبيعية $\{1, 2, \ldots\}$. هذه المجموعة يمكن تجزئتها إلى المجموعتين E وO وهما مجموعتا الأعداد الزوجية والأعداد الفردية على الترتيب. بمعنى أنه على الرغم من أن كل هذه المجموعات لا نهائية، فإن المجموعة N أكبر من E؛ حيث إن E محتواة داخل N. وأوضح جاليليو أن ما يجعل المجموعة اللانهائية تختلف عن المجموعة النهائية (المحدودة) هو أن الشخص يمكنه إزالة مجموعات لا نهائية منها، مثل إزالة E من N وما يتبقى (وهو المجموعة O

في هذه الحالة) يظل مجموعة لا نهائية. أما المجموعات النهائية فلا يمكن أن تحقق ذلك؛ حيث إننا إذا أزلنا شيئًا من مجموعة نهائية فمن المؤكد أن الباقي بعد ذلك أصغر من الأصل. هذا هو الفارق الأساسي بين طبيعة المجموعة اللانهائية والمجموعة النهائية. وعمليًّا يمكن أن يؤدي ذلك إلى جعل المجموعات اللانهائية أسهل في التعامل معها من المجموعات النهائية بمجرد أن تتعود على هذا الجانب من تركيبها.

توجد طريقة أساسية أخرى تختلف بها المجموعات اللانهائية بعضها عن بعض وهي أقل وضوحًا بكثير، ويبدو أنها لم تأخذ حقها حتى نهاية القرن التاسع عشر. فبعض المجموعات اللانهائية يمكن كتابتها في قائمة، وبعضها لا يمكن.

مجموعة الأعداد الطبيعية، وتسمى N، هي المجموعة المعتادة لأعداد العد: $\{1, 2, \ldots\}$. وهذه المجموعة تجسد فكرة القائمة اللانهائية. غير أن بعض المجموعات اللانهائية الأخرى يمكن أن توضع في تناظر واحد إلى واحد مع الأعداد الطبيعية؛ ومن ثم يمكن أن توضع في قائمةٍ أيضًا. على سبيل المثال، فلنأخذ المجموعة Z، المكونة من جميع الأعداد الصحيحة، أي الأعداد الموجبة والأعداد السالبة معًا بالإضافة إلى الصفر:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

هذه المجموعة بطبيعة الحال تعتبر قائمة مضاعفة لا نهائية. ومع ذلك، يمكن إعادة ترتيبها في قائمة لها نقطة بداية كالتالي:

$$Z = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots \qquad (2\text{–}2)$$

في الحقيقة، سوف نستخدم الفكرة المستعملة هنا أكثر من مرة؛ فإذا كان لدينا قائمتان:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \quad b_1, b_2, b_3, \ldots$$

نستطيع دمجهما معًا لتكوين قائمة واحدة تحوي جميع عناصر القائمتين الأصليتين:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$$

وهذا ما فعلناه حقًّا عندما جمعنا بين الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة في قائمة واحدة. قد تظن أنه لا يوجد أكثر مما حدث هنا. من المؤكد أنك إذا أُعطيت أي مجموعة فيمكن أن

تعتبرها قائمة بشكل ما، أليس كذلك؟ ولكن ماذا عن المجموعة Q التي تضم كل الأعداد النسبية؟ (لماذا استخدم الحرف Q للأعداد النسبية؟ لأن لها علاقةً بكلمة quotient في الإنجليزية التي تعني «خارج القسمة»). في الحقيقة، قد يكون كذلك ولكن نحتاج إلى أن نكون أكثر مهارة. سوف نتناول هذه المشكلة الأصعب بعد لحظة. ولكني أريد أولًا إزالة مصدر التباس محتمل.

القارئ قد يثير نفس الاعتراض الذي أثرته سابقًا، وهو أن برهان الدمج السابق يضم حديثنا المرسل عن عملية لا نهائية كما لو كنا قد نفَّذناها بالفعل. وجهة النظر هذه ليست ضرورية لكي نوضِّح — مثلًا — أن مجموعة الأعداد الصحيحة تُكوِّن قائمة، طالما قدمنا بوضوح ماذا نعني بذلك. عندما أقوم بتكوين قائمة لا نهائية L، فأنا أعني بذلك هنا أن لكل عدد n توجد قاعدة لتعيين ترتيب هذا العدد في L. وعندما أدَّعي أن L هي قائمة لكل الأعداد الصحيحة، فأنا أعني أن لأي عدد صحيح k يمكن إيجاد المكان الذي يظهر فيه k في القائمة L. بعبارة أخرى، على الرغم من أننا قد ننتظر إلى الأبد حتى تظهر جميع الأعداد الصحيحة، فعلينا فقط أن ننتظر لعدد محدود من الخطوات حتى يظهر أي عدد صحيح محدد. صحيح أنني لم أعط قطُّ قاعدة صريحة لتحديد ترتيب العنصر في القائمة (2–2) السابقة، لكني اعتمدت على القراء في معرفة النمط البسيط المستخدم في تكوينها. ولا حرج في ذلك شريطة أن تتمكن من مواصلة كتابة عناصر أكثر في هذه القائمة بطريقة ليست غامضة. ومع ذلك، فليس علينا أن نخدع أحدًا. على سبيل المثال، العدد الموجب n يحتل الترتيب $2n$ في القائمة، فمثلًا العدد 3 هو السادس في القائمة، والعدد السالب $-n$ يحتل الترتيب $(2n + 1)$ فمثلًا -3 ترتيبها هو السابع و0 ترتيبه هو الأول. ولهذا نرى أننا نعرف مكان كل عدد صحيح على وجه الدقة في قائمتنا، فكلها موجودة ومحسوبة.

والآن دعونا ننظر في مسألة كتابة قائمة بجميع الأعداد النسبية بين صفر وواحد. هذه تبدو مُهمَّة صعبة لأن الأعداد النسبية كثيفة، بمعنى أنه بين أي عددين منها يوجد عدد آخر؛ فمثلًا متوسط أي عددين يقع بالضبط في منتصف الطريق بينهما. هذه على أية حال لا تشكل أي صعوبة حقيقية ما دمنا لا نصر على أن نكتب الأعداد بترتيب تصاعدي أو تنازلي؛ ببساطة نكتب قائمة الأعداد النسبية التي مقامها 1 أولًا (أي الأعداد $\frac{0}{1} = 0$ و$\frac{1}{1} = 1$) ثم جميع الأعداد التي مقامها 2 ثم التي مقامها 3 وهكذا:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$$

الملاحظة الأساسية أنه يوجد دائمًا وأبدًا عدد كبير محدود من الأعداد النسبية بين 0 و1 التي لها مقام بعينه (إذا كان n هو المقام فلا يوجد أكثر من n من الأعداد)؛ ومن ثم فإن إنشاء قائمة بهذه الطريقة سوف يعطي في نهاية المطاف كل الأعداد النسبية بين 0 و1. ولن يهرب أيٌّ منها.

الآن تأتي خدعة أخرى. إذا أخذنا جميع عناصر هذه القائمة بعيدًا عن 0 و1 ثم قلبنا كل واحد منها، فسوف نحصل على جميع الأعداد النسبية الأكبر من الواحد:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{4}{3}, \frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$$

هذا يتطلب التفكير قليلًا. ولأن جميع الكسور في القائمة الأولى تقع بين 0 و1. فإن معكوساتها ستكون أكبر من 1. علاوة على ذلك، إذا كان $\frac{m}{n}$ عددًا نسبيًّا أكبر من 1 فإن $\frac{n}{m}$ عدد نسبي أصغر من 1، أي يقع بمكان ما في قائمتنا الأولى؛ ومن ثم معكوسه $\frac{m}{n}$ سيقع في المكان المناظر من القائمة الثانية. فمثلًا $\frac{5}{4}$ يقع في المكان التاسع في القائمة المعكوسة كما أن $\frac{4}{5}$ هو التاسع في قائمة الكسور (التي تبدأ بـ $\frac{1}{2}$). مرة أخرى، لن يُفقد أي عدد نسبي. قد يبدو ذلك رائعًا بدرجة تجعله لا يبدو واقعيًّا، لأنه يبدو أن هناك أعدادًا نسبية أكثر بكثير أكبر من 1 مقارنة بالأعداد المحصورة بين 0 و1. ومع ذلك، كما قلت، المجموعات اللانهائية يمكن أن تكون غريبة.

الآن لدينا مجموعتان يمكن وضعهما في قوائم: الأعداد النسبية بين 0 و1 والأعداد النسبية الأكبر من 1. باستخدام حُجة الإدماج التي استخدمناها سابقًا لإثبات أن الأعداد الصحيحة يمكن أن تُكتب في قائمة، فيمكننا الجمع بين هاتين المجموعتين في قائمة واحدة، مما يدل على أن الأعداد النسبية بدءًا من 0 إلى أعلى يمكن أن تكوِّن قائمة.

أخيرًا بنفس الطريقة، يمكننا أن نكوِّن قائمةً من جميع الأعداد النسبية السالبة، ثم بالإدماج مرة أخرى يمكننا جمعُ هذه القائمة مع قائمة الأعداد النسبية غير السالبة، لتنتج قائمة واحدة تحتوي على كل الأعداد النسبية. يمكننا فعلًا كتابة أول دزينتَين من الأعداد النسبية في قائمتنا؛ سوف نكتب الأعداد النسبية الصحيحة دون المقام 1 لتقليل الجهد. للحفاظ على عرضٍ أكثر تماثلًا، سوف نرتب الأشياء باختلاف بسيط. ابدأ بالعدد 0 واجعل القائمة الأولى ولتكن L_1 هي قائمة الأعداد النسبية بين 0 و1. ولتكن L_2 هي القائمة المكونة من معكوسات الأعداد الموجودة في L_1؛ ولتكن L_3 هي الأعداد السالبة من عناصر L_1؛ وكذلك

L_4 هي الأعداد السالبة من عناصر L_2. عندئذٍ تنتج عملية الإدماج Q على النحو التالي:

$$0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 4, -4, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, 5, -5, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, \ldots$$

ولن يجد القرَّاء مشقةً كبيرة في مد هذه القائمة إلى دزينة عناصر أخرى أو أكثر.

(٦) إلى اللانهائية وما بعدها

شخصية «بظ يطير» في فيلم الأطفال «توي ستوري» تحضُّنا على السفر إلى اللانهائية وما بعدها، وهو شيء عزيز جدًّا على قلب علماء الرياضيات الذين أخذوا على عاتقهم القيام بهذه المهمة لأكثر من قرن من الزمان، والآن أضحى لديهم فكرة جيدة جدًّا عما نتوقع عند الوصول إليها.

يوجد الكثير من المجموعات الكبيرة من الأعداد التي يمكن كتابتها في قائمة بالطريقة التي وصفناها في القسم السابق. إحدى هذه المجموعات التي تحتوي Q هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الجبرية. هذه الأعداد هي حلول معادلات كثيرة الحدود لها معاملات صحيحة (أي معادلات مثل $6x^3 + 5x^2 + 8x + 1 = 0$، حيث الأعداد المضروبة في قوى x هي أعداد صحيحة). كل عدد نسبي $\frac{a}{b}$ هو حل للمعادلة البسيطة $bx - a = 0$، ومن ثَم فهو جبري. نفس الشيء ينطبق على العدد $\sqrt{2}$ الذي هو حل للمعادلة $x^2 - 2 = 0$، ونفس الشيء بالنسبة إلى $2^{\frac{1}{3}}$ أي الجذر التكعيبي للعدد 2 لأنه حل للمعادلة $x^3 - 2 = 0$. والعدد غير الجبري يطلق عليه العدد المتسامي، رغم غرابة الاسم. كما سنرى حالًا، الأعداد المتسامية ليست نادرةً بأي حال، بالرغم من أن إثبات أن عددًا ما مُتسامٍ هو أمر صعب بشكل غير عادي. العدد غير النسبي b الذي قُدم سابقًا هو عدد متسامٍ (بالرغم من أن هذا ليس أمرًا واضحًا) وكذلك العدد π. وقد أثبت ليندمان في القرن التاسع عشر أن π ليس عددًا جبريًّا، وكان من نتائج ذلك استحالة تربيع الدائرة؛ بمعنى أنك إذا أُعطيتَ دائرةً فمن المستحيل رسمُ مربع، باستخدام حافة مستقيمة (مسطرة غير مرقمة) وفرجار، له نفس مساحة الدائرة المعطاة. الصعوبة تكمن في أن الأعداد القابلة للإنشاء هي أعداد جبرية. تربيع الدائرة هو في الواقع تحدٍّ لإنشاء $\sqrt{\pi}$. إذا أمكنك إنشاء $\sqrt{\pi}$، فسيمكنك إنشاء العدد المتسامي π، لكن من المستحيل إنشاء عدد متسامٍ.

حتى إنه ليست الأعداد الجبرية جميعها قابلةً للإنشاء. فعلى وجه الخصوص $2^{\frac{1}{3}}$ هو عدد جبري غير قابل للإنشاء وهذا يجيب عن سؤالٍ كلاسيكيٍّ آخر: إذا أُعطيت مكعبًا فهل يمكنك إنشاء مكعبٍ آخر له بالضبط ضعف حجم المكعب الأصلي؟ هذه مسألة جزيرة ديلوس (مسألة مضاعفة المكعب) الشهيرة؛ المهمة التي حدَّدها الرب حتى يبعد الطاعون عن أثينا.

آخر هذه المسائل الثلاث الكلاسيكية هي مهمة تثليث زاويةٍ اعتباطيةٍ أي تقسيم الزاوية إلى ثلاثة أجزاءٍ متساوية. فمع أن إنشاء زاوية 60° بسيط للغاية بهذا الشكل فمن المستحيل فعل ذلك مع زاوية 20°. ومن ثم تمت الإجابة عن هذه المسائل الثلاث بالنفي بعد أكثر من ٢٢٠٠ سنة من طرح هذه الأسئلة.

كثير من الناس يشعرون بمواجهة تحدٍّ عند سماع كلمة مستحيل ويرفضون تصديق أي بيان علمي يحتويها. والادعاءات المذكورة آنفًا يمكن جعلها أقل استفزازًا كالتالي: تبين أن الأعداد القابلة للإنشاء لها خواص خاصة لا تتمتع بها جميع الأعداد، ونستطيع التحقق بشكل خاص من أن $2^{\frac{1}{3}}$ تفتقر إلى واحدة من هذه الخواص. هذا البيان هادئ الصيغة له نفس فعالية التأكيد الصارخ على أنه من المستحيل مضاعفة حجم المكعب.

بالعودة إلى تحقيقاتنا الراهنة، فإننا كتبنا مجموعة الأعداد النسبية في قائمة، أي: الأعداد التي لها مفكوك عشري مكرر. وسوف نثبت الآن أنه من المستحيل عمل قائمة مماثلة لجميع الأعداد الحقيقة — جميع المفكوكات العشرية للأعداد — بين 0 و1. كيف نعرف أنه لا توجد طريقة لفعل ذلك ولكننا ببساطة لم نفكر فيها؟ نعرف ذلك لأن جورج كانتور، في نهاية القرن التاسع عشر، استحدث برهانًا أسماه البرهان القطري لإثبات أن هذا الأمر مستحيل. ويتكون هذا البرهان فقط من ملاحظة أنه بالنسبة لأي قائمة لا نهائية L من الأعداد العشرية (بين 0 و1 على سبيل المثال) من الممكن استخدام القائمة نفسها لإنشاء عدد عشري آخر بين 0 و1 لم يكن موجودًا في القائمة الأصلية L، وفسر ذلك بعناية أكثر في لحظة. هذا يبدو غير مؤذٍ تمامًا، لكنه يستتبع على الفور أنه لا توجد قائمة تشمل كل الأعداد الحقيقية بين 0 و1.

أما البرهان نفسه، فهو كما يلي. افترض أن لديك قائمتك L. كل ما نحتاج إليه هو كتابة عدد a يختلف عن العدد الأول في القائمة L في الخانة العشرية الأولى، ويختلف عن العدد الثاني في القائمة في الخانة العشرية الثانية، وهكذا، ويختلف عن العدد الذي ترتيبه n في الخانة العشرية رقم n. هذا العدد الذي أنشأته يختلف عن كل الأعداد المدرجة في

القائمة. إذا تخيلت أن كل الأعداد العشرية المدرجة في القائمة L تكتب واحدًا تحت الآخر، فسننشئ العدد a بالنظر إلى قطر القائمة المعروضة من أعلى اليسار إلى أسفل اليمين ونتأكد أن a تختلف عن الصف الذي ترتيبه n من المصفوفة عند المُدخل الذي يقع في العمود الذي ترتيبه n.

المجموعات التي لا يمكن كتابتها في قائمة تُسمَّى مجموعات غير قابلة للعد، أما المجموعات التي يمكن كتابتها في قائمة فتسمى مجموعات قابلة للعد (بالرغم من كونها قد تكون لا نهائية مثل مجموعة الأعداد النسبية). من الواضح أنه إذا كانت المجموعة A قابلة للعد، فكذلك أي مجموعة B محتواة داخلها؛ لأن لكتابة قائمة B تحتاج فقط أخذ قائمة A وقراءتها من أجل إنشاء قائمة بعناصر B. ومن ثم إذا كانت S مجموعة غير T تحتوي S ستكون غير قابلة للعد أيضًا (لأنه إذا كانت T قابلة للعد، فإن S ستكون قابلة للعد أيضًا بناء على البرهان السابق). ومن ثم، نظرًا لأن مجموعة الأعداد الحقيقية بين 0 و1 ثبت أنها غير قابلة للعد فإن المجموعة R التي تضم كافة الأعداد الحقيقية ستكون أيضًا غير قابلة للعد، على الرغم من أن المجموعة Q التي تضم كل الأعداد النسبية هي مجموعة قابلة للعد. ولهذا فقد اكتشفنا بطريقة نوعية أن مجموعة الأعداد العشرية أكبر من مجموعة الأعداد النسبية.

يمكننا إضافة المزيد. بناءً على حقيقة أن مجموعة كل الأعداد الجبرية A هي مجموعة قابلة للعد (ولم نُثبِت ذلك هنا، ولكن إثباته أصعب قليلًا من إثبات أن مجموعة الأعداد النسبية قابلة للعد)، نستنتج أن المجموعة T التي تضم كل الأعداد المتسامية هي مجموعة غير قابلة للعد. (إذا كانت T قابلة للعد فإننا نستطيع إثبات أن اتحاد المجموعتين A وT هو مجموعة قابلة للعد، ولكن هذا متناقض مع حقيقة أن اتحادهما يُنتج مجموعة الأعداد الحقيقة التي نعرف الآن أنها غير قابلة للعد.) هذه نتيجة مهمة للغاية: لأنها توضح أن T مجموعة غير قابلة للعد (وعلى الأخص لا نهائية) دون معرفة أيٍّ من عناصرها. بعبارة أخرى، يمكننا الآن معرفة وجود كثيرٍ من الأعداد المتسامية غير القابلة للعد دون معرفة هُويَّة أي عنصر منها.

الفصل الثالث

بعض الهندسة

في هذا الفصل نهدف إلى عرض بعض النتائج المشهورة في الهندسة الإقليدية، ومنها نظرية فيثاغورث وبعض نظريات الدائرة. ما زالت براهين هذه النظريات تثير الدهشة والبهجة اليومَ كما كانت قبلَ آلاف السنين، ويمكننا التأكد من أن أحفادنا سيُفتنون بها تمامًا كما فُتنَّا نحن.

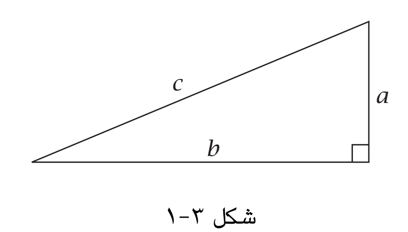
سوف نبدأ بنظرية فيثاغورث. هذه النظرية تربط الهندسة والجبر بطريقة عجزت عنها أي حقيقة أخرى. فهي تعطي معنًى جبريًّا للمفهوم المادي للمسافة؛ ومن ثم فإننا نستشعر وجودَها دائمًا في الرياضيات والفيزياء — فنظرية النسبية الخاصة، على سبيل المثال، تعتمد عليها.

(١) أهمية المربعات على أضلاع المثلثات

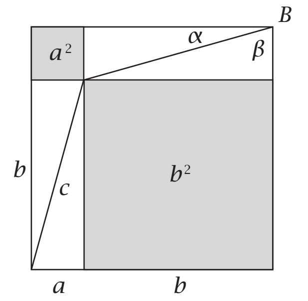
تنصُّ نظرية فيثاغورث على أن مربع الوتر c في مثلث قائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المرسومين على ضلعَي القائمة a وb (انظر شكل ٣-١). ويمكن ملاحظة ذلك بمجرد مقارنة المربعين الموضحين في شكل ٣-٢. كل صورة هي لمربع طول ضلعه $a + b$ ومن ثَمَّ فهُما يمثلان المساحة نفسها. وكل صورة تحوي أربع نسخ من المثلث القائم الزاوية المعطَى، فإذا أزلنا هذه النسخ الأربعة فالمنطقة المظللة الباقية من كل صورة ستكون لها المساحة نفسها أيضًا. من الواضح أن المنطقة المظللة الأولى هي $a^2 + b^2$ بينما في الصورة الثانية المنطقة المظللة تساوي c^2. وهذا ينهي البرهان.

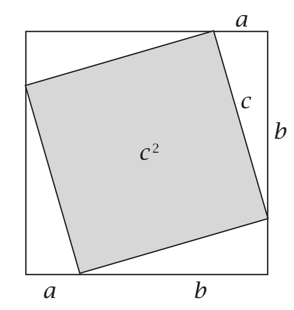
حقًّا أنه أمر سهل. ولا أستطيع التفكير في سبب وجيه يمنع عرض هذا البرهان في المدارس. فالواقع أنه إذا كان هناك عيب في هذا البرهان، فهو أنه شديد القِصَر لدرجة أنك تنتهي من قراءته قبل أن تشعر. الشخص المتشكك قد يسأل: أين أثَّرَت بالضبط حقيقة

أن المثلث له زاوية قائمة في البرهان؟ إجابة هذا السؤال تكشف أن البرهان افترض على الأقل افتراضًا واحدًا خفيًّا، وهو الذي سنشرحه الآن.



شكل ٣-١



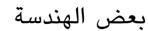


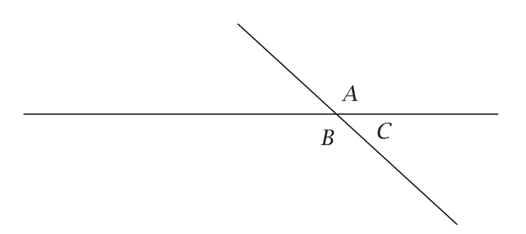
شكل ٣-٢

نحن نحتاج إلى معرفة أن مجموع الزوايا الثلاث في المثلث القائم تساوي زاوية مستقيمة. (وهذا ينطبق على مجموع زوايا أي مثلث كما سنرى بعد قليل.) وهذا يبرر الادعاء بأن الشكل في اليسار والشكل المظلل في اليمين حقًّا مربعات. فالزاوية عند B، على سبيل المثال، لا بدَّ أنها زاوية قائمة لأنها تساوي مجموع الزاويتين الحادتين α وβ في المثلث القائم الزاوية أي إن قياسها لا بدَّ أن يساوي $180 - 90 = 90^\circ$؛ لذا دعونا نثبت هذه الحقيقة الأساسية عن المثلثات.

لنفعل ذلك، نحن في حاجة إلى بعض الخواص الأساسية للزوايا.

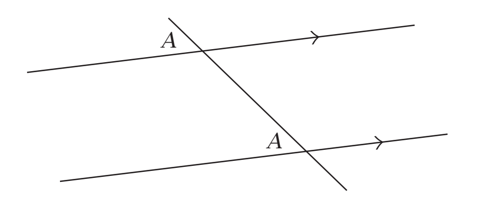
الخاصية الأولى: عندما يتقاطع مستقيمان فإن الزوايا المتقابلة بالرأس متساوية في القياس (شكل ٣-٣). هذا يعني أن الزاويتين A وB متساويتان، وذلك لأن كلًّا من $A + C$ و$B + C$ تساويان زاوية مستقيمة.





شكل ٣-٣

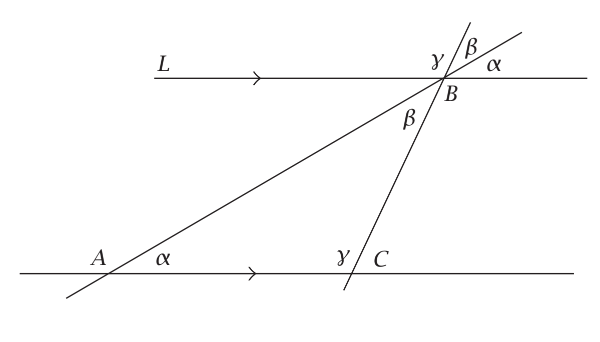
الخاصية الثانية: عندما يقطع مستقيم خطَّين متوازيَين فإن الزوايا المتناظرة تكون متساوية في القياس (شكل ٣-٤). وهذه مُسلَّمة، وإحدى القواعد الأساسية التي لا نقدم لها أي برهان فيما يتعلق بالافتراضات الأخرى. (أي منظومة في الرياضيات تبدأ ببعض البديهيات غير المُبرهَنة. والرياضيات البحتة هي دراسة النتائج المترتبة على هذه البديهيات.)



شكل ٣-٤

الآن ليكن ABC أيَّ مثلث أطلقنا على زواياه α وβ وγ (أو وفقًا للحروف اليونانية ألفا وبيتا وجاما — أخشى أنك قد تُقطِّب حاجبَيك عند رؤية هذه الرموز، لكن خُذ نفَسًا عميقًا ولا تنزعج منها). نحن نريد إثبات أن $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$، أي قيمة زاويتَين قائمتَين. في الشكل ٣-٥، ليكن L الخط المستقيم المار بالنقطة B ويوازي الخط المستقيم AC، ثم قُم بمدِّ الخطَّين AB وBC كما هو موضح في الشكل. ويمكننا تمييز الزوايا الثلاث أعلى الخط L كما هو موضح، حيث الزاوية β مبررة بموجب الخاصية الأولى، في حين تُفسِّر الخاصية الثانية الزاويتَين الأخريَين؛ قارن بين الزاويتَين α وكذلك الزاويتَين γ وتذكر أن L يوازي الخط AC. يبقى أن تلاحظ فقط أن الزوايا الثلاث المقصودة

تكوِّن زاوية مستقيمة عند النقطة B على الخط L لكي تصل إلى النتيجة المطلوبة أن $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. وهذا هو المطلوب إثباته.



شكل ٣-٥

ومما سبق فقد أقمنا فيثاغورث على أساسٍ متين. ونستنتج من هذه القاعدة الهندسية إحدى الحقائق الجبرية الأساسية. مساحة المثلث القائم الزاوية هنا هي $\frac{1}{2}ab$ بل إنك لا تحتاج الصيغة الشهيرة: $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع لحساب مساحة المثلث؛ إذ إن نسختَين من المثلث تكونان بوضوح المستطيل الذي مساحته ab. مما سبق فإن مساحة المثلثات الأربعة في كلٍّ من المربعَين الكبيرَين تساوي $2ab$. ومن ثَم فإن المربع على اليمين من الصورة الأصلية له المساحة $(a+b)^2$ وهو أيضًا يساوي $c^2 + 2ab$. والآن، استخدم فيثاغورث لاستبدال c^2 بالقيمة $a^2 + b^2$ لكي نحصل على:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab. \qquad (3\text{–}1)$$

وهذه حقيقة جبرية بسيطة سوف نتحدث عنها أكثر في الفصل الخامس. إذا كنت مستعدًّا لاستخدام هذه الحقيقة كنقطة بداية فيمكنك استنتاج نظرية فيثاغورث من صورة المربع، في اليمين في شكل ٣-٢ وحده، لكتابة مساحته كمجموع لأجزائه نحصل على:

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab,$$

وباستخدام المتطابقة (3–1) نحصل على:

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab.$$

نحتاج الآن فقط إلى أن نزيل الجزء غير المرغوب فيه وهو $2ab$ من الطرفين فنحصل على نظرية فيثاغورث.

هذا البرهان الذي يجمع بين الهندسة والجبر قد يكون أقل جمالًا من برهاننا الأصلي، لكن قد يكون لديه ميزة في كونه أسهل تذكرًا، فكل ما عليك هو أن تتذكر الصورة اليمنى في الشكل ٣-٢ لاستنتاجه مرة أخرى.

(٢) فيثاغورث يكشف الحقيقة حول الدوائر

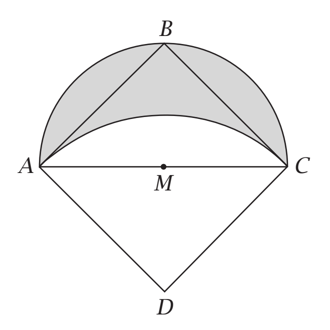
لا تكون قوةُ نتيجةٍ ما واضحةً دائمًا من النظرة الأولى، وقد لا يكون منافيًا للمنطق، على الرغم من التوكيدات السابقة، أن نقول إن نظرية فيثاغورث تبدو حقيقةً مملةً حول مثلث خاص جدًّا. إذ لماذا نكون مهتمين برسم مربعات على أضلاع مثلث من الأساس؟

التجربة أثبتت أن العَلاقة الفيثاغورثية تظهر باستمرار في الرياضيات والفيزياء وأن كلًّا منهما لم يكن ليتقدم بدونها. على سبيل المثال، اكتشف هيرودوت نتيجة غير متوقعة للنظرية في القرن الخامس قبل الميلاد. في هذه المرحلة من تاريخ الرياضيات، كانت الرياضيات تبحث في بعض الأسئلة المتطورة. لا سيما أن إيجاد المساحات الدقيقة للأشكال ذات الحدود المنحنية أثبت صعوبته. ويرجع جزء كبير من هذا إلى الطبيعة الغامضة للعدد π، وهو ما لم يُحَل لآلاف السنين. ولذلك كان من الصعب مقاومة النتيجة المتشائمة التي ترى أن من المستحيل إيجاد المساحة المضبوطة لأي شكل حدوده منحنية أو منحنية جزئيًّا. وقد أثبت هيرودوت أن الأمر ليس كذلك عن طريق ابتكار سلسلة من الأمثلة الذكية عن القطاعات الدائرية هلالية الشكل؛ حيث يمكن إيجاد مساحتها بالضبط. أول هذه الأمثلة أتى من التأمل قليلًا حول حقيقة ما قاله فيثاغورث.

المربع المُنشأ على وتر المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مساحتَي المربعَين المنشأين على الضلعَين الأقصر. مع ذلك يمكن تطبيق النظرية نفسها إذا أنشأنا أنصاف دوائر بدلًا من المربعات. لماذا؟ لأن مساحة نصف الدائرة التي نصف قطرها r هو $\frac{\pi}{2}r^2$ ومن ثم فإن مساحة نصف الدائرة المرسومة على الضلع a هي $\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}a^2$، وبتعبيرات مماثلة لأنصاف الدوائر على الضلعين b وc. ومع ذلك، حيث إن $a^2 + b^2 = c^2$، فسوف نحصل على $\frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{\pi}{8}c^2$، مما يوضح أن مجموع مساحتَي أنصاف الدوائر المرسومة على الضلعين الأقصر يساوي مساحة نصف الدائرة المرسومة على الوتر. وليس هناك

شيء خاص يميز أنصاف الدوائر أيضًا، فبإمكاننا الاستعاضة عن المربعات بأي أشكال مساحتها تتناسب مع مربع طول الضلع.

والآن بعد أن قلنا كل ذلك، دعنا ندرس شكل ٣-٦. يحتوي هذا الشكل على مربع وحدة $ABCD$ ومرسوم على قطره AC نصف دائرة ABC. وتقع النقطة M في منتصف AC. كذلك رسمنا ربع دائرة نصف قطرها DA من A إلى C. وسوف نَحسُب الآن مساحة الجزء المظلل في شكل ٣-٦.



شكل ٣-٦

مساحة الشكل الهلالي تساوي مساحة المثلث ABC للأسباب الآتية. نحصل على مساحة الهلال بأخذ المثلث، وطرح الجزء من ربع الدائرة الأكبر التي وترها AC، ثم جمع الجزأَين الخارجيَّين الأصغر. والآن الجزء الأكبر يشبه الجزأين الأصغر (أي إن له نفس الشكل ولكنه فقط أكبر) لأن المثلثين ADC وAMB متشابهان؛ إذ إن كليهما متساوي الساقين وقائم الزاوية. من نظرية فيثاغورث فإن مساحة الجزء المرسوم على وتر المثلث ABC تساوي مجموع مساحة الجزأين المرسومين على الضلعين الأقصر؛ ومن ثَم فالنتيجة النهائية للجمع والطرح هي الصفر. ومن ذلك نستنتج أن مساحة الشكل الهلالي هي مساحة المثلث ABC وهي: $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

ما أوضحه هيرودوت هو أنه من الممكن، على الأقل أحيانًا، إيجاد مساحة الشكل وإن كانت كل حدوده عبارة عن أقواس دوائر. هذا المثال هو عبارة عن شكل قابل للإنشاء — أي إنك تستطيع أن ترسم أجزاءه باستخدام حافة مستقيمة وفرجار فقط. وهذا قد يبعث الأمل في إمكانية تربيع الدائرة؛ حيث تم اكتشاف أنه إذا أمكن إيجاد مساحة أي

شكل هلالي، فمن الممكن إذن إيجاد مساحة الدائرة؛ ومن ثم يمكن تعيين قيمة π أيضًا. ومع ذلك، فهناك حدود لهذه الطريقة، وقد قيل إن هيرودوت نفسه قدر هذا. إلا أنه استنبط ما يُسمى بالتربيعات القمرية.

(٣) المثلثات والمساحات

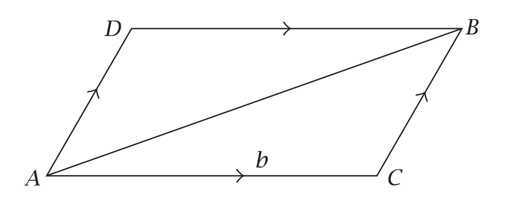
العدد π يُعرف بأنه النسبة بين محيط الدائرة إلى نصف قطرها؛ ومن ثَم فإن محيط الدائرة يساوي $2\pi r$ إذا كان r هو نصف قطر الدائرة. بالتأكيد مضاعفة الأبعاد الخطية لأي شكل مستوٍ سوف يزيد مساحته بمقدار 4 أضعاف، وعلى العموم إذا كبرنا شكلًا بمقدار c من الأضعاف، فإن مساحته تزيد بمقدار c^2. ومن ثَم فنحن نتوقع أن تتناسب مساحة الدائرة مع r^2، ولكن ليس واضحًا لماذا يكون ثابت التناسب هو π أيضًا. لمعرفة لماذا يحدث هذا، سنبدأ مرة أخرى بالنظر إلى المثلثات.

مساحة المثلث ABC هي نصف مساحة متوازي الأضلاع $ADBC$ الذي ينتج عن تدوير المثلث حول الضلع AB، نظرًا لأن متوازي الأضلاع الناتج يتكون من نسختين من المثلث الأصلي (شكل ٣-٧). مساحة متوازي الأضلاع هي bh حيث h هو ارتفاع المثلث. وهذا يمكن رؤيته لأنه يمكن قصُّ مثلث عند إحدى نهايتَي متوازي الأضلاع ولصقه مرة أخرى عند الطرف الآخذ لتكوين مستطيل bh كما يتضح في شكل ٣-٨. ينتج عن ذلك أن مساحة المثلث ABC هي $\frac{1}{2}bh$. والمدهش في هذا أن صيغة نصف القاعدة مضروبة في الارتفاع تنطبق أيضًا على الدائرة باعتبار أن القاعدة هي المحيط وأن الارتفاع هو المسافة من المحيط إلى المركز:

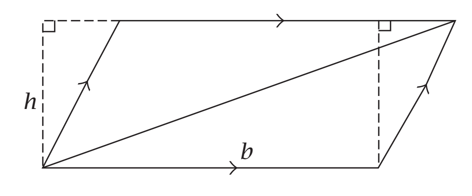
$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(2\pi r)\,r = \pi r^2.$$

وهذا يدل على أننا ينبغي أن نحاول إثبات مساحة الدائرة عن طريق نوع من تثليث الشكل (تقسيمه إلى مثلثات).

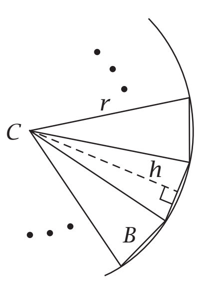
خذ عدد n من النقاط على مسافات متساوية على محيط الدائرة؛ ومن ثم تُكوِّن مضلعًا منتظمًا مكونًا من عدد n من الأضلاع داخل الدائرة. (نعني بكلمة «مضلع منتظم» أن جميع أضلاعه وجميع زواياه متساوية.) بتوصيل كل نقطة إلى مركز الدائرة نكون بذلك قد جزأنا المضلع إلى n من المثلثات المتساوية الارتفاع h والقاعدة B (انظر شكل ٣-٩).



شكل ٣-٧



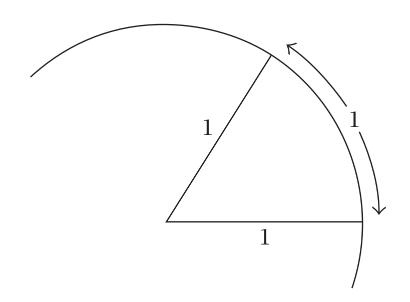
شكل ٣-٨



شكل ٣-٩

تعتبر مساحة هذا المضلع الداخلي هي $n\left(\frac{1}{2}Bh\right)$. من الواضح أن nB هو الطول الخارجي للمضلع وسوف نرمز له بالرمز b؛ ومن ثم فإن مساحة المضلع هي $\frac{1}{2}bh$. والآن، مساحة الدائرة هي القيمة النهائية — عندما تزداد n — لمساحة المضلع المرسوم داخل الدائرة لأن كل نقطة داخل الدائرة تقع داخل واحد من هذه الأشكال المرسومة داخل الدائرة. القيمة النهائية للعدد b هو محيط الدائرة $2\pi r$، والقيمة النهائية للارتفاع h لكل مثلث هي r. ومن ثم مساحة الدائرة هي: $\frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r^2$.

وهذا وقت مناسب يمكننا عنده ذكر قياس الزوايا. الطريقة العملية هي تقسيم محيط الدائرة إلى 360 وحدة، التي تعرف بدورها بأنها «درجات». وهذا الرقم يعتبر إلى حدٍّ ما اعتباطيًّا، ولكن الرقم 360 له العديد من العوامل؛ ومن ثم فإن أبسط أجزاء الدائرة يقابل عددًا صحيحًا من الدرجات. بالإضافة إلى ذلك، فإن التدوير بمقدار درجة واحدة هو أقل تدوير يمكن ملاحظته بالعين المجردة وهذا ما يجعله وحدة قياس نافعة. على أية حال، إذا كنت مهتمًّا بخصائص الكائنات الهندسية أكثر من قياسها، فإن هناك وحدة أخرى قد تلائمك أكثر. طول محيط الدائرة التي نصف قطرها واحد $r = 1$ هو 2π، ومن ثَم يكون من السهل رياضيًّا وضعُ وحدة الدوران مقابل وحدة التنقل حول المحيط. وحدة قياس الزوايا هذه تعرف باسم الراديان؛ ومن ثم يوجد 2π من الراديان في الدائرة (شكل ٣-١٠). وقياس الزاوية المستقيمة يساوي عدد π من وحدات الراديان، في حين أن الزاوية القائمة تساوي $\frac{\pi}{2}$. ويتضح لنا أن الراديان يساوي ما يزيد قليلًا عن 57°.

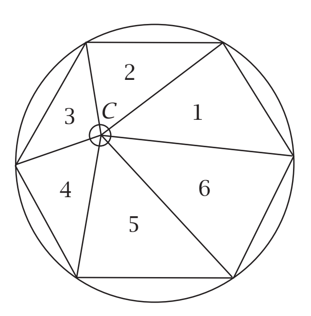


شكل ٣-١٠

لن يشكل هذا فارقًا ضخمًا فيما نحن بصدده الآن، ولكن كتابة رمز واحد، π، يتطلب مساحة أقل من كتابة 180°، ولهذا السبب سوف نستخدم الراديان في هذا الفصل إلا إذا ذكرنا صراحة غير ذلك.

فكرة التثليث هذه، أي تقسيم الكائن الهندسي إلى مثلثات بطريقة خاصة قد تبدو ساذجة وبسيطة للغاية، ولكنها مثمرة جدًّا في الهندسة، والتوبولوجيا، وهو فرع الرياضيات الذي يهتم بالخواص العامة للأشكال والفراغ. وقد يكون من المفاجئ أحيانًا رؤية كيف يمكن التعامل مع الكثير من المسائل الصعبة جدًّا في الرياضيات بنجاح، من خلال الصبر والبناء من الحالات الخاصة إلى العامة.

بالمناسبة أذكر أنه ما دمنا قد عرفنا أن مجموع زوايا المثلث هو π من الراديان (180°)، فإنه من السهل حساب مجموع زوايا أي مضلع. فمثلًا أي شكل مستوٍ منتظم P وله n من الأضلاع (في شكل ٣-١١ نأخذ $n = 6$). يمكننا تقسيم P إلى n من المثلثات بتوصيل كل رأس إلى نفس النقطة C داخل المضلع المنتظم. عندئذٍ سيكون مجموع زوايا المثلثات هو $n\pi$ من الراديان. كل مثلث له واحدة من زواياه عند الرأس C، وهذه الزوايا لا دخل لها بمجموع زوايا المضلع. ومع ذلك، فكل هذه الزوايا المركزية تكون دورة كاملة؛ أي إنها تُسهم بـ $2\pi(360^\circ)$ في مجموع جميع زوايا المثلثات. ومن ثم فإن مجموع زوايا المضلع P يساوي $n\pi - 2\pi = (n - 2)\pi$، وخاصة مجموع زوايا أي شكل رباعي هو 2π راديان أو 360°. بطبيعة الحال، إذا أخذنا $n = 3$ نحصل مرة أخرى على مجموع زوايا المثلث $(3 - 2)\pi = \pi$.



شكل ٣-١١

(٤) نظريات الدائرة

(٤-١) الأشكال السداسية الأضلاع

الدائرة التي نصف قطرها r ومركزها C هي مجموعة النقاط في المستوى التي تبعد عن C مسافة تساوي r. وتعتبر الدوائر هي الكائنات الأكثر تماثلًا في المستوى، وبذلك فمن المتوقع أن يكون للدائرة بعض المميزات الخاصة.

واحدة من هذه المميزات ترتبط بالأشكال السداسية الأضلاع. وكما هو معروف منذ القدم عن نحل العسل وصانعي الألحفة المكونة من قطع متنوعة، من الممكن تقسيم

المستوى إلى مضلعات سداسية — أي إن المستوى يمكن تغطيته بمضلعات سداسية متطابقة بحيث لا تتداخل مع بعضها إلا عند حدودها — وهذه الخاصية تستغل في عملهم.

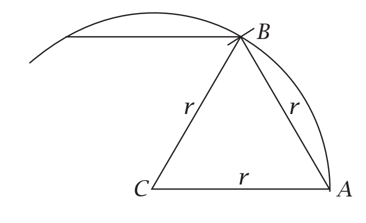
سوف أخرج عن الموضوع للحظة لأذكر أنه من الممكن أيضًا تغطية المستوى بمثلثات متساوية الأضلاع أو بمربعات، ولكن ليس بأي نوع آخر من المضلعات المنتظمة. لأنه لنفترض أن هناك عددًا k مثلًا من المضلعات المنتظمة ذات عدد n من الأضلاع تتقابل في نقطة مشتركة لكي يتم تغطية المستوى (مثل الفسيفساء) فيكون مجموع زواياها هو دائرة كاملة، 2π. أثبتنا سابقًا أن مجموع زوايا المضلع هو $(n-2)\pi$ أي إن كل زاوية تساوي $\frac{(n-2)}{n}\pi$. ومن ثَم فإن k من هذه الزوايا تكوِّن معًا دائرة كاملة، بمعنى أن:

$$\frac{k\,(n-2)}{n}\pi = 2\pi;$$

أو $k = \frac{2n}{n-2}$. غير أن العدد k هو عدد صحيح، والتعبير على اليمين لن يكون صحيحًا إلا بقيم $n = 3, 4$ أو 6؛ عند القيمة $n = 5$ نحصل على $\frac{10}{3}$ ولأي عدد آخر أكبر من 6 فإن القيمة تقع بين 3 و2. ومن ثم لا توجد تغطيات أخرى للمستوى بمضلعات منتظمة إلا هذه الثلاثة أي إن $n = 3, 4, 6$. يوجد العديد من طرق التغطية بالفسيفساء، ولكنها ليست من هذا النوع على أية حال. نُسخ من أي مثلث يمكن أن تغطي المستوى (كوِّن متوازيات الأضلاع باستخدام المثلث كما فعلنا سابقًا واكتشف سهولة عمل ذلك)، والمضلعات الثمانية والمربعات معًا يمكن أن تكون غطاء كاملًا، بينما السداسيات والخماسيات معًا تكون شكلًا كُرويًّا مثل كرة القدم. منذ بضع سنوات مضت أثبت روجر بنروز من جامعة أكسفورد أنه من الممكن تغطية المستوى بنسخ من اثنين من الأشكال البسيطة غير المنتظمة بحيث إن النمط لا يتكرر أبدًا؛ أي إن التغطية تبدو مختلفة اعتمادًا على مكانك في المستوى.

بالعودة إلى المضلعات السداسية، غالبًا ما ينصح صانعو الألحفة بتكوين المضلع السداسي الأساسي لبطانة اللحاف برسم دائرة وتوصيل نصف القطر من مركز الدائرة إلى المحيط ست مرات ليحددوا بذلك رءوس المضلع السداسي. وقد سمعت مرة شخصًا (ليس صانع ألحفة) يشرح هذا معتذرًا، فيقول إن هذه الطريقة ليست دقيقةً لكنها مناسبة عمليًّا، واستطرد حديثه المشوش مسهبًا وهو يقول إن عدم دقة هذه الطريقة ناجم عن أن 2π لا تساوي 6 بالضبط. ولكن هذا غير صحيح! فهي طريقة دقيقة (بالرغم من أن 2π فعلًا أكبر من 6) ويمكن للمرء رؤية هذا بسهولة، كما يلي.

افتح الفرجار (البرجل) لمسافة نصف قطر الدائرة r وضع سن الفرجار عند A، وهي أي نقطة على محيط الدائرة، ثم ضع علامة عند النقطة B حيث يقطع سن الفرجار الدائرة. سوف نُطلق على مركز الدائرة C، ومن ثَم نحصل على شكل ٣-١٢. الملاحظة الرئيسية هي أنه بما أن النقاط A وB وC تبعد كلٌّ منها عن الأخرى بمسافة r، إذن فهي تُكوِّن مثلثًا متساوي الأضلاع. بشكل خاص الزاوية ACB تساوي 60°؛ أي بالضبط $\frac{1}{6}$ من قياس الدائرة الكاملة 360°. ومن ثم فإن تكرار رسم خمس نقاط على محيط الدائرة تبعد كلٌّ منها عن الأخرى مسافةً تساوي طول نصف قطر الدائرة، سوف يعود بنا إلى نقطة البداية A وستُكوِّن النقاط الستة على الدائرة مضلعًا سداسيًّا منتظمًا.



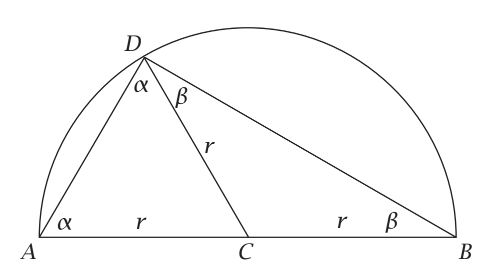
شكل ٣-١٢

قد يكون هذا أبسط شكل من الأشكال المتماثلة العديدة للدائرة، والتي تُعرف باسم نظريات الدائرة. على الرغم من أن بعض هذه النظريات مدهشة تمامًا، فإن برهانها يستغل الخاصية المميزة للدائرة على نحوٍ متكرر، وهذه الخاصية هي أن جميع النقاط على محيط الدائرة دائمًا على نفس المسافة r من مركز الدائرة، بالإضافة إلى حقيقة أن مجموع زوايا أي مثلث هو 180°.

(٤-٢) الزوايا في أنصاف الدوائر

المثال التالي عن نظرية الدائرة هو أن الزاوية المرسومة في نصف الدائرة هي زاوية قائمة قياسها 90°. بمعنى أنه إذا كان A وB هما نقطتي نهاية قطر في دائرة وكانت D هي أي نقطة أخرى في الدائرة، إذَن فزاوية ADB زاوية قائمة. بعبارة أخرى، عند تحرك النقطة D حول محيط الدائرة، فعلى الرغم من تغيُّر المسافات AD وBD، فهذه الزاوية لا تتغير أبدًا؛ إذ يلتقي الخطان دائمًا عند زاوية قائمة (انظر شكل ٣-١٣). وهذا

يمكن رؤيته بسهولة بتوصيل النقطة D بمركز الدائرة C، وهذا يُقسِّم المثلث الكبير إلى مثلثَين صغيرَين متساويَي الساقَين، حيث الأضلاع الثلاثة (AC وBC وDC) لها الطول المشترك r. وبما أن المثلثين متساويا الساقين، فكلٌّ منهما يحتوي على زاويتَين متساويتَي القياس، سنرمز لهما بـ α وβ على الترتيب في شكل ٣-١٣. وكما نرى مجموع زوايا المثلث الأكبر $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^\circ$ أي إن $\alpha + \beta$ اللتَين تساويان قياس الزاوية عند D تساوي 90°.

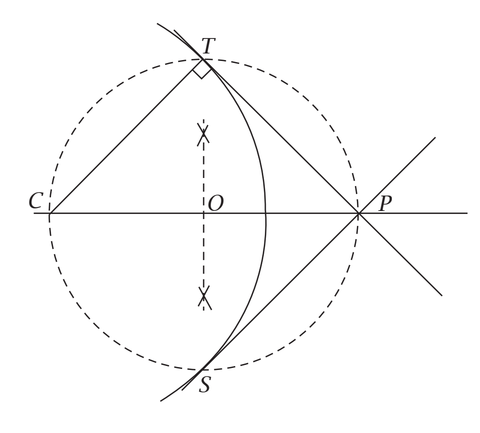


شكل ٣-١٣

هذه الحقيقة بعينها تُستخدَم غالبًا في إنشاء الفِرجار القياسي والحافة المستقيمة. فمثلًا كيف ترسُم مُماسًّا لدائرة (لأنه يوجد اثنان منها) من نقطة معينة خارج الدائرة؟ أولًا تذكر طريقة إنشاء المنصف العمودي على القطعة المستقيمة AC كما هو موضح في شكل ٣-١ في الفصل السابق. أوجِد مركز الدائرة بأخذ تقاطع الأعمدة المنصفة لأي وترَين في الدائرة. وصِل مركز الدائرة C بالنقطة P وأوجِد النقطة O في منتصف CP (أيضًا من خلال رسم المنصفات العمودية) (شكل ٣-١٤). ارسُم دائرة مركزها O ونصف قطرها OP؛ وسوف تقطع الدائرة الأصلية عند نقطتين S وT، والخطان PS وPT يمثلان المُماسَّين المطلوبَين.

لماذا؟ الخاصية المميزة لمُماسِّ الدائرة هي أنه يُكوِّن زاوية قائمة مع نصف القطر عند نقطة التماس. فالزاوية CTP هي زاوية قائمة، حيث T (وبالمثل S) تقع على محيط الدائرة التي قطرها CP.

إن كون الزاوية في نصف الدائرة زاوية قائمة هي حقيقة لافتة ومفيدة، ولكنها فقط حالة خاصة من النظرية التالية.



شكل ٣-١٤

(٣-٤) الزوايا عند مراكز الدوائر

الزاوية عند مركز الدائرة ضعف الزاوية المحيطية المرسومة على نفس القوس أي إن: $\angle ABC = 2\angle ADB$.

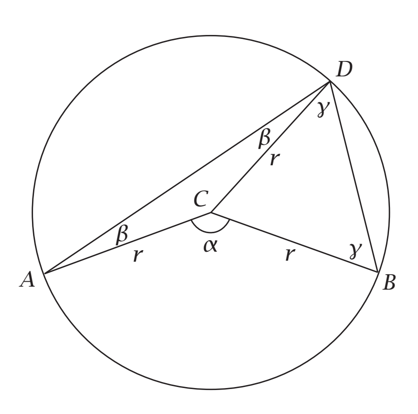
هذه النظرية قد تحتاج بعض الشرح، والأشكال المرافقة يمكن أن تقطع شوطًا في هذا الاتجاه. ليكن AB أي قوس في الدائرة كما في الشكل ٣-١٥. نقصد بالزاوية عند مركز الدائرة المقابلة لهذا القوس، زاوية ACB. والآن لنفترض أن D أي نقطة على محيط الدائرة خارج القطاع الدائري ACB. فالزاوية ADB هي ما نقصد بالزاوية المحيطية المقابلة للقوس AB. ومن ثَم تنصُّ النظرية على أنه مهما تحركت D على الدائرة من A إلى B فهذه الزاوية لا تتغير أبدًا وتساوي دائمًا نصف الزاوية المركزية ACB. بشكل خاص، إذا كانت النقاط A وC وB على استقامة واحدة، أي إنها جميعًا على نفس الخط المستقيم؛ فإن القوس AB هو عبارة عن نصف دائرة، والزاوية ACB هي زاوية مستقيمة والزاوية ADB هي زاوية قائمة.

لإثبات صحة النظرية، انظر إلى الشكل ٣-١٥ ولاحظ الطريقة التي استخدمناها كما في نظرية نصف الدائرة السابقة في تمييز أنصاف أقطار الدائرة وتسمية الزوايا المتساوية في القياس. ويصبح المطلوب هو اختبار أن $\alpha = 2(\beta + \gamma)$. حيث إن مجموع زوايا أي مثلث هو π فإن الزوايا غير المُسمَّاة عند C لها القيم $(\pi - 2\beta)$ و$(\pi - 2\gamma)$

على الترتيب. ولأن مجموع الزوايا الثلاث عند C هو 2π نحصل على:

$$(\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) + \alpha = 2\pi$$

$$\Longrightarrow 2\pi + \alpha - 2\beta - 2\gamma = 2\pi,$$



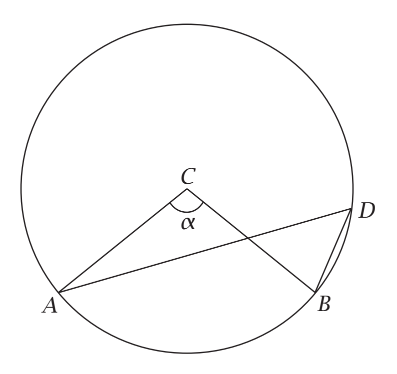
شكل ٣-١٥

بحذف 2π من طرفَي المعادلة نحصل على:

$$\alpha = 2\beta + 2\gamma = 2\left(\beta + \gamma\right).$$

هذا هو البرهان لكن ليس كله لأن شكل ٣-١٥ لا يمثل جميع الحالات. عند تحرك النقطة D مثلًا حول الدائرة في اتجاه عقارب الساعة، في لحظة معينة ستقع A وC وD على خط مستقيم واحد. الإثبات السابق ينطبق أيضًا على هذه الحالة — الزاوية β تصبح صفرًا ولا يتغير أي شيء آخر. ومع ذلك، عند استمرار تحرك D حول الدائرة فالمركز C سيظهر خارج المثلث ABD، كما في الشكل ٣-١٦. هذه تُمثِّل حالة مختلفة حقًّا، وهناك برهان مختلف (رغم أنه مشابه)، ولن أذكره، يبين أن الزاوية α ستظل تساوي ضعف قياس الزاوية ADB.

ما زال هناك جانب واحد لمواجهته في هذه الحالة. بالعودة إلى الشكلين ٣-١٥ و٣-١٦. عندما تتحرك النقطة D حول المحيط من A إلى B، ستظل الزاوية ABD دائمًا



شكل ٣-١٦

$\frac{\alpha}{2}$. على أية حال عندما تمر D على B يوجد عدم اتصال — أو قفزة مفاجئة، إذا شئت استخدام هذا التعبير. الزاوية ADB ما زالت نصف الزاوية المركزية لكنها الآن الزاوية المنعكسة ACB التي تستخدم. فمثلًا بقياس الدرجات، نعود إلى الشكل ٣-١٥ ونفترض أن الزاوية $ACB = 140^\circ$. فتكون الزاوية $ACB = 70^\circ$ حتى تمر D فعلًا على B وتدخل القطاع السفلي من الدائرة، حيث تصبح فجأة:

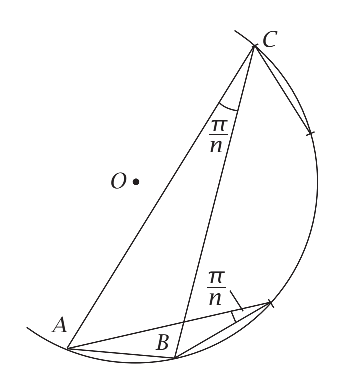
$$\angle ADB = \frac{1}{2}(360 - 140)^\circ = \frac{1}{2}220^\circ = 110^\circ.$$

وتظل على هذه القيمة حتى تمر D على A حيث تعود القيمة 70°.

كثيرًا ما يتم التعبير عن حقيقة أن الزاوية ADB هي نفسها بالنسبة لأي نقطة D بقول إن الزاويتين المقابلتين لنفس القوس — القوس AB في هذه الحالة — متساويتان. وهذا له تأثير على المضلعات المنتظمة، بالرغم من أن الصلة قد لا تبدو تامة الوضوح. وسوف يكون لدينا سبب لاستدعائها عندما نتكلم عن «النسبة الذهبية»؛ ولذا فإننا نَلفت الانتباه إليها هنا.

ليكن P أي مضلع منتظم وله عدد n من الأضلاع، وC أحد أركان المضلع P، وكذلك AB هو أحد أضلاع P (شكل ٣-١٧). بغض النظر عن الركن الذي اخترته ليكون هو الركن C، فستظل الزاوية ACB هي نفسها دائمًا وتساوي $\frac{\pi}{n}$. ولكي ترى لماذا هذا صحيح، خذ دائرة وتخيل إنشاء مضلع منتظم له عدد n من الأضلاع، وذلك بوضع عدد n من النقاط على أبعاد متساوية على محيط الدائرة. فإذا كان AB ضلعًا، وC ركنًا كما

ذكرنا آنفًا؛ فنرى أن الزاوية ACB هي الزاوية المقابلة للقوس AB من الدائرة؛ ومن ثم تساوي نصف الزاوية عند المركز. ولأن نقاط المضلع P موزَّعة على مسافات متساوية حول الدائرة فإن الزاوية عند المركز هي $\frac{2\pi}{n}$ ومن ثم تكون ACB هي $\frac{\pi}{n}$ وهذا يُثبت الفرض.

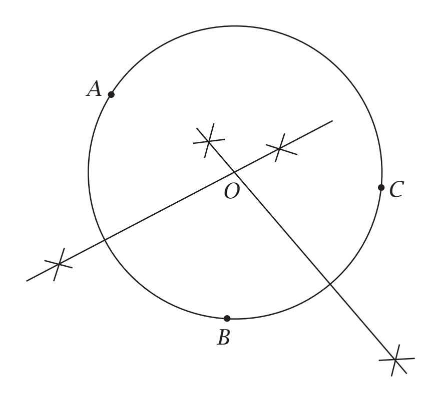


شكل ٣-١٧

وثمة نتيجة أخرى من السهل توضيحها الآن، وهي أن مجموع الزاويتَين المتقابلتين فيما يُسمى الرباعي الدائري هو $180°$. الرباعي الدائري Q هو الشكل الرباعي الذي يمكن رسمُه داخل الدائرة. ليست جميع الأشكال الرباعية لها هذه الخاصية. فمن الصحيح أن أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة — أي لا تقع على نفس الخط — تقع على دائرة وحيدة ويمكن بسهولة إنشاء هذه الدائرة كما يلي.

المركز O لأي دائرة تمر بالنقط A وB وC يبعد بمسافة متساوية عن كل من النقاط الثلاث. المنصف العمودي للقطعة المستقيمة AB يتكون من جميع النقاط التي تبعد المسافة نفسها عن A وB؛ ومن ثم O يجب أن تقع على هذا المنصف وبنفس هذا المنطق يجب أن تقع على المنصف العمودي على BC أيضًا. أي إن O هي نقطة تقاطع المنصفين العموديين على BC وAB (شكل ٣-١٨). بالمثل فإن O يجب أن تقع على العمود المنصف للضلع AC، بحيث تكون المنصفات العمودية الثلاث متقاطعة؛ أي إنها خطوط تتقابل في نقطة واحدة. بالنظر إلى ABC كمثلث عشوائي، يمكننا أن نفسر هذا التكوين بأن نقول إن الأعمدة المنصفة لأضلاع أي مثلث لا بدَّ أن تتقابل في نقطة واحدة.

الآن، بالنسبة لأي شكل رباعي $Q = ABCD$، دائمًا ما يكون مجموع زواياه هو $360°$. كما رأينا توجد دائرة وحيدة تحتوي على القوس ABC، وبشكل عام، لا يوجد



شكل ٣-١٨

سبب يجعل الرأس الرابع D يقع على الدائرة. ولكن، إذا حدث ذلك وكان D يقع على محيط هذه الدائرة، فإننا نقول إن Q هو شكل رباعي دائري، ويتمتع Q بخاصية إضافية ذكرت سابقًا: كل زاويتَين متقابلتَين متكاملتان؛ أي إن مجموعهما 180°. ويمكن للقراء إقناع أنفسهم بسهولة عن طريق رسم الشكل المناسب وتوصيل كل ركن بمركز الدائرة، وبذلك يتم إنشاء أربع مثلثات متساوية الساقين. قم بتمييز كل الزوايا، بحيث يتم تمييز الزوايا المتساوية القياس بنفس الرمز، وسوف تجد أن مجموع كل زاويتين متقابلتين متساوٍ. أي إن مجموع كل زاويتَين متقابلتَين يجب أن يساوي نصف 360°.

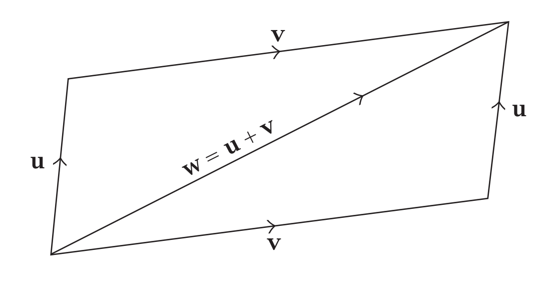
الهندسة الإقليدية لا يُهتم بها كثيرًا في المدارس في الوقت الحاضر. ويُنظر إلى الهندسة أساسًا من خلال وجهة نظر ما يُسمى بالهندسة التحليلية. وهذا النهج ابتدعه رينيه ديكارت، ويمكن الادعاء بأنه نجح نجاحًا كبيرًا. الفكرة الأساسية هي العمل دائمًا داخل إطار نظام الإحداثيات المتعامدة — أي المحور x والمحور y المتعامدَين. ويتم التعامل مع الخطوط والمنحنيات من خلال معادلات تربط بين إحداثيات نقطها. فمثلًا أي خط مستقيم يتكون من جميع النقاط (x, y) الموجودة في المستوى وفي الوقت نفسه تحقق المعادلة $y = mx + c$؛ حيث m تقيس ميل الخط بينما العدد c يخبرنا أين يقطع الخط المحور y. هذا النهج في الواقع يسمح لنا بتشفير الهندسة كالجبر؛ ومن ثم تتحول النظريات الهندسية لتصبح تدقيقات جبرية. ومن المؤكد أن هذا جيد لترسيخ أقدام الطلاب في الجبر، ويتيح الإعداد الجيد لتعلُّم حساب التفاضل والتكامل. ولكنه نهج جامد إلى حدٍّ ما؛ ومن ثم يمكن أن ينتج طلابًا ذوي أُفقٍ رياضيٍّ ضيق. والاستخدام الحصري

لهذا النهج في الهندسة ينجم عنه خَسارة حقيقية. فجزء كبير من الهندسة الأساسية من الأحسن معاملته وَفقًا لما يتلاءم معه، فنتائج مثل التي رأيناها توًّا ستُفهم بوضوح أكبر دون الرجوع إلى الإحداثيات.

(٥) المتجهات

هناك شيءٌ وسَطٌ بين الهندسة الكلاسيكية والهندسة الإحداثية، ويتمثل في استخدام المتجهات. هذا المفهوم له أهمية هائلة في الفيزياء الرياضية. وسوف نكتفي هنا بتقديم الفكرة وإعطاء مثال يوضح طريقة استخدامها عندما يكون المطلوب شرح أنواع معينة من الحقائق الهندسية.

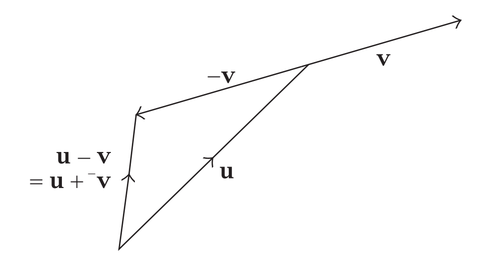
لتحقيق هذا الهدف سوف نعتبر المتجه عبارة عن توجيه بقطع مسافة معينة في اتجاه معين. ومن ثَم، فالمتجه $\mathbf{v}$ يمكن اعتباره سهمًا طوله هو المسافة التي يقطعها واتجاهه هو اتجاه رأس السهم. ويمكنك جمع متجهين $\mathbf{v}$ و$\mathbf{u}$ معًا لتكوين متجه جديد $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ (شكل ٣-١٩). ونحصل على السهم للمتجه $\mathbf{w}$ عن طريق وضع $\mathbf{u}$ أولًا، ثم وضع ذيل المتجه $\mathbf{v}$ عند رأس المتجه $\mathbf{u}$ وتكوين السهم الذي ذيله هو نفس ذيل $\mathbf{u}$ ورأسه هو رأس المتجه $\mathbf{v}$. ويمكن جمعُ المتجهَين $\mathbf{u}$ و$\mathbf{v}$ بالترتيب العكسي بنفس النتيجة النهائية؛ ففي كلتا الحالتَين، سيكون المتجه الناتج $\mathbf{w}$ مناظرًا للقطر المتجه لمتوازي الأضلاع كما هو واضح في الشكل ٣-١٩.



شكل ٣-١٩

يمكننا أيضًا ضربُ المتجهات في عدد؛ فمثلًا $3\mathbf{v}$ تعني متجهًا في نفس اتجاه $\mathbf{v}$ ولكن طوله يبلغ ثلاثة أمثال طول $\mathbf{v}$؛ والمتجه $-2\mathbf{v}$ يبلغ طوله ضعف المتجه $\mathbf{v}$ ولكن في الاتجاه

المعاكس لاتجاه $\mathbf{v}$ نظرًا لوجود إشارة السالب (شكل ٣-٢٠). هذا يعطينا إطارًا جبريًّا بسيطًا لدراسة متجهاتنا. ويجدر بنا ذكر شيء آخر لإكمال هذا الموضوع. إذا جمعنا $\mathbf{v}$ و$-\mathbf{v}$ فإننا نرجع إلى نقطة البداية. ونمثل هذا بأنه المتجه الصفري 0، وله المقدار 0 وعلى عكس جميع المتجهات الأخرى، هذا المتجه ليس له اتجاه. وبما أن المتجه $-\mathbf{v}$ له معنًى، فيمكننا استخدامه في عملية طرح المتجهات: $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ تعني $\mathbf{u} + {}^{-}\mathbf{v}$، تمامًا كما في حالة الأعداد العادية، يمكن استخدام $3 - 2$ اختصارًا بدلًا من $(3 - {}^{-}3) + 2$.

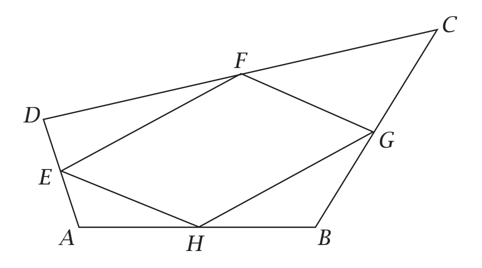


شكل ٣-٢٠

وهذا يكفي لعرض نوع من أنواع الإثباتات التي تستخدم عند التعامل مع المتجهات. لدينا كائن هندسي، فدعنا ننظر إلى النقطتين A وB الموجودتين على هذا الكائن. ثم نتحرك حول الكائن من A إلى B بطريقتين مختلفتين مع وصف المسارَين كمجموع لمتجهين أو أكثر. ثم نساوي مجموعي المتجهات لأن كلًّا منهما يساوي المتجه $\mathbf{AB}$ من A إلى B. ومن هذه المعادلة المتساوية يمكن الاستدلال على تعادلات أقل وضوحًا.

كمثال دعونا نثبت الحقيقة المدهشة التالية: لتأخذ أي شكل رباعي $Q = ABCD$ كما هو واضح في شكل ٣-٢١. يمكننا إثبات أن الشكل الرباعي $EFGH$ المتكون بتوصيل منتصفات أضلاع Q هو في الحقيقة متوازي أضلاع، بمعنى أن EF يساوي ويوازي HG وFG يساوي ويوازي EH.

وفي البداية نثبت أن الضلعين EF وHG مثلًا متوازيان ومتساويان، ونلاحظ أن المقصود به تأكيد المساواة بين المتجهين $\mathbf{EF}$ و$\mathbf{HG}$؛ ومن ثَم نبحث عن معادلة متجهية



شكل ٣-٢١

تربطهما معًا. ويمكننا كتابة معادلة على الفور: عند الانتقال من A إلى C مرورًا بالنقطتين E وF، ثم الانتقال من A إلى C مرورًا بالنقطتين H وG، يصبح لدينا اثنان من مجموع المتجهات كلاهما يساوي **AC**:

$$\mathbf{AE} + \mathbf{EF} + \mathbf{FC} = \mathbf{AH} + \mathbf{HG} + \mathbf{GC}. \qquad (3\text{–}2)$$

هذا يبدو واعدًا لأن المعادلة (2–3) تحتوي على **EF** في جانب و**HG** في الجانب الآخر. ولكن توجد أربعة حدود أخرى نحاول التخلص منها. علاوة على ذلك، يجب استخدام حقيقة أن النقط E وF وG وH تقع جميعها عند منتصفات أضلاع Q، ولهذا يجب التفكير قليلًا.

لدينا أيضًا معادلة متجهات أخرى:

$$\mathbf{AD} + \mathbf{DC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}.$$

بما أن E تقع في منتصف AD، يمكننا أن نكتب أن $\mathbf{AD} = 2\mathbf{AE}$؛ وبالمثل يمكننا أن نعيد كتابة باقي الحدود في المعادلة السابقة لنحصل على:

$$2\mathbf{AE} + 2\mathbf{FC} = 2\mathbf{AH} + 2\mathbf{GC}. \qquad (3\text{–}3)$$

بتنصيف أطوال المتجهات في (3–3) نحصل على:

$$\mathbf{AE} + \mathbf{FC} = \mathbf{AH} + \mathbf{GC}. \qquad (3\text{–}4)$$

وأخيرًا، بالعودة إلى (3-2). وبما أن المتجهات يمكن جمعها دون الاعتماد على الترتيب، إذن يمكننا كتابة المعادلة السابقة في الصورة:

$$\mathbf{EF} + (\mathbf{AE} + \mathbf{FC}) = \mathbf{HG} + (\mathbf{AH} + \mathbf{GC}). \tag{3-5}$$

تخبرنا المعادلة (3-4) أن المتجهات الموجودة بين الأقواس في المعادلة (3-5) متساوية: فإذا طرحناها من كلا جانبي المعادلة (3-5) فسوف نحصل على ما نريد:

$$\mathbf{EF} = \mathbf{HG}.$$

وبنفس الطريقة يمكنك تأكيد أن $\mathbf{FG} = \mathbf{EH}$، ومن ثَم نثبت أن الشكل الرباعي الذي رءوسه هي النقاط المنصفة لأضلاع أي شكل رباعي هو في الحقيقة متوازي أضلاع.

وهناك مثال آخر على نفس المنوال وهو حقيقة أن الأقطار في متوازي الأضلاع تتقابل عند منتصفاتها. يمكنك إقناع نفسك بذلك باستخدام منهاج مشابه: ابدأ عند أحد الأركان وانتقل إلى نقطة المنتصف لكل قطر وقم بترميز كل عملية انتقال على أنها مجموع متجهات. يبقى لك إثبات أن هذين المجموعين للمتجهات في الحقيقة متساويان أي إن منتصفي القطرين ينطبقان.

الفصل الرابع

الأعداد

الأعداد تحمل نوعًا من السحر لمعظم الناس. وقد دُرِسَت باستفاضة لعدة قرون ولا يزال هناك بعض الأسئلة البسيطة عن الأعداد العادية التي لا يعرف إجاباتِها أحد. وبعض هذه الأسئلة حاسمة لفروع كاملة من الرياضيات، بينما بعضها لا تزيد عن كونها أسئلة فضولية لا يترتب عليها شيء. وسوف أقدِّم عينةً من هذه الأسئلة لاحقًا في هذا الفصل.

الصعوبة في دراسة الأعداد أن هناك أعدادًا لا نهائية منها وكلها مختلفة. هذه قد تبدو ملاحظة بسيطة وتافهة، ولكن سوف نعرض لمثال بسيط عن الصعوبات التي تسببها. العدد 12 هو عدد «زائد»، بمعنى أن مجموع عوامله (باستثناء 12) أكبر من العدد نفسه: 16 = 6 + 4 + 3 + 2 + 1. فهل يوجد أي أعداد فردية «زائدة»؟ قد تقنعك تجربة بسيطة مع الأعداد الفردية الصغيرة أن الإجابة هي: لا. ويمكنك بعد ذلك أن تُمضيَ من الوقت ما تشاء للبحث عن برهان لإثبات هذه المسألة التقديرية، ولن تجد أبدًا برهانًا؛ لأن هناك فعلًا أعدادًا فردية زائدة؛ كل ما هناك أنك تحتاج للبحث بعمق أكثر مما تتوقع لإيجاد هذه الأعداد. وأعتقد أن العدد الأول — من الذاكرة — هو 945، حيث مجموع عوامله:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 15 + 21 + 27 + 35 + 45 + 63$$

$$+ 105 + 135 + 189 + 315 = 975.$$

وحتى اليوم لا يعرف أحد هل يوجد عدد فردي «مثالي»، أي عدد فردي يساوي بالضبط مجموع عوامله. توجد أعداد زوجية مثالية مثل 6 و28 و496 ويمكنك التحقق من ذلك بنفسك. الأعداد الزوجية المثالية متفق عليها منذ أن أثبت أويلر في القرن الثامنَ عشرَ أنها في تناظر واحد لواحد مع ما يسمى أعداد ميرسين الأولية: وهي الأعداد الأولية التي تأخذ

شكل $2^p - 1$ حيث p نفسه عدد أولي. إذا أُعطيت عدد ميرسين أوليًّا يمكنك إيجاد عدد زوجي مثالي، وقد أثبت أويلر أن كل عدد زوجي مثالي ينشأ بهذه الطريقة. ويعود الربط بين الأعداد المثالية وأعداد ميرسين الأولية إلى إقليدس، ومع ذلك، من غير المعلوم ما إذا كان هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية من هذا النوع الخاص أم لا.

لعلكم تدركون أن تركيب الأعداد مرتبط بالأعداد الأولية؛ ومن ثَم ستكون هذه هي النقطة التي نبدأ منها. وموضوع هذا الفصل هو مجموعة أعداد العد الموجبة $\{1, 2, 3, \dots\}$. حتى 0 لن يدخل ضمن حدود مناقشتنا إلا بدعوة صريحة.

العدد p يكون أوليًّا إذا كان لديه عاملان فقط أحدهما p نفسه والآخر هو 1. أما العدد 1 فهو لا يحسب مع الأعداد الأولية لأن له عاملًا واحدًا فقط ومن ثم فإن الأعداد الأولية الأولى هي: 2 و3 و5 و7 و11 و13 و17 و… أما العدد الذي له أكثر من عاملين، فيُسمَّى: «عددًا مؤلفًا».

الأعداد الأولية هي لَبِنات البناء الضربية في أعداد العد لأنه من الواضح أن أي عدد إما أن يكون أوليًّا أو يمكن كتابته كحاصل ضرب أعداد أولية؛ فمثلًا: $60 = 6 \times 10 = 5 \times 2 \times 3 \times 2$. ويمكننا أن نقول $5 \times 3 \times 2^2$ هو تحليل العدد 60 إلى عوامل أوليَّة. فكيف نعرف أنه لا يوجد تحليل آخر؟ ربما كان من الممكن أن نحلل بعض الأعداد كحواصل ضرب لأعداد أولية بطرق مختلفة تمامًا. وأنا أعتقد أن معظم الناس متأكدون من أن هذا ليس هو الحال والواقع أنهم ربما يشعرون بالاستغراب عند الاستماع لهذا الاقتراح الغريب: لأنه لو كانت الأعداد تسلك هذا السلوك الغريب فإنهم من المؤكد أن يكونوا قد سمعوا بذلك من قبل. وهذا صحيح تمامًا، ولكن مسألة وجود تحليلٍ وحيدٍ لأي عدد هو مسألة غير واضحة، رغم أنها قد تكون مألوفة. وهذا يتوقف على الخاصية التالية للأعداد الأولية.

تمهيدية إقليدس: إذا كان العدد الأولي p هو أحد عوامل حاصل ضربab فإن p يكون عاملًا من عوامل تحليل a أو b (وربما هو عامل من عوامل تحليل كليهما).

الأعداد المؤلفة ليس لديها هذه الخاصية؛ فمثلًا 6 هو عامل من عوامل تحليل $72 = 9 \times 8$ ولكنه ليس عاملًا من عوامل تحليل العدد 8 أو العدد 9. وقد استخدمت تمهيدية إقليدس بطريقة ملتوية قليلًا في الفصل الثاني، حيث أثبت أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي. وقلت إنه إذا

كان 2 عاملًا من عوامل a^2، إذن فالعدد a نفسه يجب أن يكون عددًا زوجيًّا. ونحصل على ذلك من تمهيدية إقليدس بوضع $p = 2$، وهو العدد الأولي الزوجي الوحيد، ووضع $b = a$. إن استخدام تمهيدية إقليدس، في الحقيقة، يجعل من السهل تعميم حجة أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي؛ ومن ثَم إثبات أن $\sqrt{p}$ عدد غير نسبي لأي عدد أولي p.

إذا أخذنا تمهيدية إقليدس كمُسلَّمة، فإن من السهل أن نُقنع أنفسنا أنه من المستحيل أن نجد أربعة أعداد أولية مختلفة p وq وr وs، بحيث تحقق أن $pq = rs$. لنفترض أن هذا يمكن أن يتحقق. فبما أن p أحد عوامل pq فإنه أيضًا عامل من عوامل rs، وباستخدام إقليدس فإنp يكون عاملًا من عوامل r أو s. فلنفترض أنه عامل من عوامل r. ومع ذلك، فإن أي عدد أكبر من 1 لا يمكن أن يكون عاملًا من عوامل r إلا إذا كان يساويr لأن r عدد أولي؛ ولهذا فإن $p = r$ ويمكننا حذف العامل المشترك في المعادلة $pq = ps$ ونحصل على $q = s$ أيضًا. ومن ثم فقد تبين لنا أن تحليلَي العددين الأوليين هما نفس الشيء. وهذا يمكن تعميمه لأي عدد من العوامل الأولية دون أي صعوبة حقيقية: افترض أن: $p_1p_2 \ldots p_n = q_1q_2 \ldots q_m$ حيث كل الأعداد p وكل q هي أعداد أولية، وافترض أننا قد رتبنا كل الأعداد p وq ترتيبًا تصاعديًّا. (هذا لا ينفي احتمالية أن يكون عددان أو أكثر من الأعداد p متساويين، ونفس الشيء بالنسبة للأعداد q.) باستخدام تمهيدية إقليدس، يمكن أن نستنتج أن $p_1 = q_1$ كما سبق. عندئذٍ نقوم بالحذف ونكرر هذه الحجة $n - 1$ من المرات للحصول على النتيجة أن العدد n، وهو عدد العوامل الأولية في الطرف الأيسر، يجب أن يتطابق تمامًا مع العدد m، وهو عدد العوامل الأولية في الطرف الأيمن وأن: $p_1 = q_1$ و$p_2 = q_2$ و ...

نستنتج من ذلك، شريطة أن تكون تمهيدية إقليدس صحيحة، أنه لا توجد إلا طريقة واحدة لتحليل أي عدد كحاصل ضرب أعداد أولية.

بعد قليل سوف أثبت تمهيدية إقليدس بطريقة غير متوقعة، من خلال استخدام خوارزمية إقليدس لحساب القاسم المشترك الأعظم لعددين. ولكن قبل أن أتناول هذا الموضوع، سوف أناقش مسألة أخرى. يوجد بالتأكيد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية.

هذه المسألة ليست بالوضوح الذي قد تتخيله. فلا يكفي أن نقول إنه بما أنه يوجد عددٌ لا نهائي من الأعداد وكلٌّ منها عبارة عن حاصل ضرب أعداد أولية، إذن لا بدَّ أنه يوجد عددٌ لا نهائي من الأعداد الأولية. فهناك عددٌ لا نهائي من قوى العدد 2 مثل 2 و4 و8 و16 و32 و... ولكن يوجد فقط عدد أولي واحد موجود في التحليل الخاص بكل

هذه الأعداد. لذلك لا يتضح فورًا أنه يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية. من المحتمل أن يكون هناك عددٌ ثابتٌ من الأعداد الأولية، مثلًا عشرة، حيث يكون كل عددٍ عبارةً عن حاصل ضرب من هذه الأعداد الأولية العشرة، رغم أن الأعداد الضخمة جدًّا ستكون عبارة عن حاصل ضرب هذه الأعداد الأولية مرفوعة لقوى كبيرة. وأنا على يقين أنك لا تزال تعتقد أن لا شيء من هذا القبيل صحيح، لكن بما أنه لا توجد قائمة لا نهائية من الأعداد الأولية يمكننا أن نعود إليها، فكيف يمكننا التأكد من أن الأعداد الأولية لن تنتهيَ بعد وقتٍ ما؟ نحن نعلم ذلك، نظرًا للحُجة البسيطة التالية التي ساقها إقليدس.

لتكن p_1 وp_2 و$\dots$ وp_n ترمز لعدد n من الأعداد الأولية الأولى؛ فمثلًا إذا كانت n هي 10 فإن هذه القائمة ستكون 2 و3 و5 و7 و11 و13 و17 و19 و23 و29. ضع N هي حاصل ضرب الأعداد n الأولى من الأعداد الأولية واعتبر $N + 1 = p_1p_2\dots p_n + 1$. والآن كل عدد، ومن بينها، $N + 1$، له واحد على الأقل من العوامل الأولية. ومع ذلك، بالنسبة لكلٍّ من الأعداد الأولية p في قائمتنا، $\frac{N}{p}$ عدد صحيح (لأن p أحد عوامل تحليل العدد N)؛ ومن ثم فإن $\frac{N+1}{p} = \frac{N}{p} + \frac{1}{p}$ ليس بعدد صحيح. ونستنتج من ذلك أنه بالرغم من أن $N + 1$ له على الأقل عامل أولي واحد، فلن يكون أي من الأعداد الأولية p_1 وp_2 و... وp_n؛ ومن ثم فهو يجب أن يكون أكبر منها كلها. ينتج من ذلك أنه يوجد عدد أولي q بقسمة $N + 1$ بحيث إن $p_n < q \leq N + 1$. بشكل خاص، هذا يثبت أنه في أي قائمة للأعداد الأولية p_1 وp_2 و$\dots$ وp_n، يوجد دائمًا على الأقل عدد أولي ليس في القائمة؛ ومن ثم فإن مجموعة الأعداد الأولية يجب أن تكون لا نهائية.

(١) إيجاد القاسم المشترك بالطرح

تعلمنا جميعًا في المدرسة القاسم المشترك الأعظم d لأي عددين a وb. فمثلًا القاسم المشترك الأعظم للعددين $a = 12$ و$b = 8$ هو $d = 4$. نشأت الفكرة عند البحث عن أقل مقام مشترك حتى نجمع عددين يحتويان كسورًا. فإذا كانت المقامات هي a وb فإن أقل مقام مشترك هو حاصل ضرب العددين a وb، وهو يساوي $\frac{ab}{d}$. وفي مثالنا السابق هذا يساوي $24 = 2 \times 12 = \frac{(8\times12)}{4}$.

كيف نوجد d؟ أنا شخصيًّا لا أذكر أن أحدًا أوضحَ لي كيف أوجده، مع أن d يمكن التعبير عنه ببساطة شديدة باستخدام التحليل لأعداد أولية لكلٍّ من a وb. فعلى سبيل المثال إذا كانت: $a = 2058 = 2 \times 3 \times 7^3$ و$b = 3675 = 3 \times 5^2 \times 7^2$

فإن: $d = 3 \times 7^2 = 147$، العوامل الأولية لـ d هي بالضبط العوامل الأولية المشتركة لكلٍّ من a وb. والقوة المرفوع إليها كل عدد أولي موجود في تحليل d هي أقل القوتين للعدد الأولي في تحليل a وb. ورغم أن هذا يحل المسألة، فإنه يتطلب عملًا أكثر من اللازم. ومن الممكن إيجاد d دون تحليل a أو b، وهذا مهم لأنه في الحالة العامة من الصعب جدًّا إيجاد المعاملات الأولية للأعداد الكبيرة مع أنه — ومن حيث المبدأ — يمكن عمل ذلك بالتجربة والخطأ.

تسمى عملية إيجاد القاسم المشترك الأعظم d للعددين a وb خوارزمية إقليدس وتتم على النحو التالي:

(١) اطرح العدد الأصغر من الأكبر.
(٢) اترك العدد الأكبر وكرر الخطوة (١) مع العددين الباقيين.
(٣) استمر حتى يصبح العددان المتبقيان متساويين؛ وهذا العدد النهائي هو d.

لنطبق هذه الخوارزمية لزوج الأعداد $(3675, 2058)$. أزواج الأعداد التي نحصل عليها تظهر كالآتى:

$$(3675, 2058) \longrightarrow (2058, 1617) \longrightarrow (1617, 441) \longrightarrow (1176, 441)$$
$$\longrightarrow (735, 441) \longrightarrow (441, 294) \longrightarrow (294, 147) \longrightarrow (147, 147);$$

ومن ثمَّ في هذا المثال $d = 147$ كما حُسبَت سابقًا باستخدام العوامل الأولية في التحليل. أي إننا أوجدنا d دون تحليل العددين 2058 و3675. نلاحظ أن أعلى عدد في العددين يقل في كل زوج عن الزوج السابق له، وتكون الحدود العليا هي:

$$3675, 2058, 1617, 1176, 735, 441, 294, 147.$$

ربما تكون خوارزمية إقليدس هذه هي أقدم نموذج حقيقي للخوارزميات وهي طريقة ميكانيكية للبت في مسألةٍ ما. في عصر الحاسبات، أعتقد أن هذا موضوع جذاب للمدارس الثانوية لإعادة اكتشافه. لماذا تنجح؟

ربما أول سؤال يسأله علماء الحاسبات عن أي خوارزمية هو «هل تتوقف هذه الخوارزمية؟» إنها تأخذك إلى حلقة أو مجموعة متكررة من الأوامر التي يتم تنفيذها

لعدد من المرات، ومن المؤكد أننا لا نريد أن نكرر هذه الأوامر إلى الأبد. ومع ذلك، يجب أن تتوقف؛ فنبدأ مع عددين موجبين وفي كل مرة نذهب للخطوة (٢) يقل العدد الأكبر في العددين. وهذا لا يمكن أن يستمر للأبد؛ لأن العدد الأكبر يمكن أن يقل ليصل إلى 0. هذا يحدث إذا — وفقط إذا — كان العددان في خطوة ما متساويَين (راجع المثال)، وعندها تتوقف الخوارزمية. وعندئذٍ تنتج الخوارزمية عددًا، ولكن لماذا هو بالضرورة العامل المشترك الأعظم d؟

السبب هو أن هذه الطريقة تحفظ جميع العوامل المشتركة للرقمين في كل مرحلة، كما سنشرح. فلنفترض أننا بدأنا بالعددين a وb، وأن a هو أكبر العددين. عندئذٍ نقوم بالخطوة الأولى $a - b = r$ مثلًا ونستمر مع الزوج b وr بدلًا من a وb. فإذا كان c أي عامل مشترك بين a وb، حيث $a = cx$ و$b = cy$ على سبيل المثال. فإذن، $r = cx - cy = c(x - y)$، أي إن c أحد عوامل r أيضًا. بنفس الطريقة يمكنك التحقق باستخدام المعادلة $a = b + r$ أن القاسم المشترك بين b وr هو أيضًا أحد عوامل a. من ذلك نستنتج أن مجموعة العوامل المشتركة للعددين a وb هي نفسها مجموعة العوامل المشتركة للعددين b وr. وبشكل خاص، أكبر عنصر في هذه المجموعة للعوامل المشتركة، ويطلق عليه العامل المشترك الأعظم، للعددين a وb يساوي العامل المشترك الأعظم للعددين b وr. وفي كل مرة تنفذ فيها الحلقة؛ على الرغم من أن العددين يتغيران، فإن العامل المشترك الأعظم للعددين يظل كما هو. وفي النهاية، كما رأينا بالفعل، يكون العددان كما هما، والعامل المشترك الأعظم لعددين متساويين هو العدد نفسه.

يوجد شيئان مهمان جدًّا حول خوارزمية إقليدس، أودُّ أن أطرحهما، أحدهما تطبيقي والآخر نظري. لنفترض أننا نستخدم الخوارزمية على العددين $(92, 8)$. تتطلب الطريقة التي تحدثنا عنها أن نطرح 8 من 92 أكثر من مرة:

$$(92, 8) \longrightarrow (84, 8) \longrightarrow (76, 8) \longrightarrow \cdots$$

عدد مرات طرح 8 بهذه الطريقة سوف يكون 11 مرة، وهو العدد الذي يتم ضرب 8 فيه لتقترب من 92. ومن الواضح، أننا نستطيع إسراع العملية بقسمة 92 على 8 وطرح المضاعفات المتعددة لـ 8 في خطوة واحدة:

$$92 = 11 \times 8 + 4.$$

ومعنى ذلك أننا نكرر تنفيذ الحلقة 11 مرة قبل أن يصبح 8 هو أكبر العددين وفي هذه الحالة يكون الباقي 4. عندئذٍ يكون $4 \times 2 = 8$ والباقي 0، وهذا يعني أننا بعد تنفيذ الحلقة مرتين أخريين، سوف يصبح الباقي 0. وهذا يدل أنه في المرة الأخيرة التي تم فيها تنفيذ الحلقة كان الرقمان متساويين، وكانا يساويان 4، وهو العامل المشترك الأعظم للعددين 92 و8. أي إن:

$$(92,8) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (8,4) \longrightarrow (4,4) : d = 4.$$

ويتم تنفيذ الخوارزمية عمليًّا بهذه الطريقة؛ ومن ثم تكون الحسبة كما يلي (في كل مرحلة نضع خطًّا تحت العددين المستخدمين):
أوجد العامل المشترك الأعظم للعددين $\underline{516}$ و$\underline{432}$:

$$516 = 1 \times \underline{432} + \underline{84}$$

$$432 = 5 \times \underline{84} + \underline{12}$$

$$84 = 7 \times \underline{12}.$$

ولأن الباقي هو 0 فإن العامل المشترك الأعظم المطلوب هو 12.

أما من الناحية النظرية، فنحن نستطيع استخدام هذه المعادلات للتعبير عن العامل المشترك الأعظم (في هذه الحالة 12) باستخدام الزوج الأصلي من الأعداد كما سنوضح. سنبدأ بالمعادلة قبل الأخيرة ونكتب:

$$12 = 432 - 5 \times 84. \qquad (4\text{–}1)$$

يمكننا الآن استخدام المعادلة الأولى للتعبير عن الباقي المتوسط 84 بدلالة العددين 516، 432:

$$84 = 516 - 432. \qquad (4\text{–}2)$$

بتعويض (4–2) في (4–1) نحصل على:

$$12 = 432 - 5(516 - 432) = 432 - 5 \times 516 + 5 \times 432;$$

أي إن:

$$12 = 6 \times 432 - 5 \times 516. \qquad (4\text{–}3)$$

ونلاحظ هنا شيئين. أولًا: مع أننا لا نتعامل إلا مع أعداد موجبة فإننا اضطررنا لضرب عددين سالبين أي $432 \times 5 = -432 \times -5$. إذا أزعجك هذا فثق بأننا سوف نعود لبرهان هذا الموضوع في الفصل القادم. في هذه الخطوة لا نحتاج إلا لملاحظة ما حدث وأن المعادلة النهائية (3–4) صحيحة ويمكنك اختبارها بنفسك.

ثانيًا: بالعمل على معادلات خوارزمية إقليدس في الاتجاه المعاكس ترى أنه يمكن دائمًا إيجاد عددين صحيحين x وy بحيث إن $d = ax + by$، مع أنهما قد يكونان غير موجبين كما رأينا في المثال السابق $a = 516$ و$b = 432$ فحصلنا على $d = 12$ و$x = -5$ و$y = 6$. بفرض أن العددين a وb أوليان فيما بينهما بمعنى أن العامل المشترك الأعظم بينهما هو 1. (مثلًا العددان 40، 21 أوليان فيما بينهما ولكن العددين 24 و21 غير أوليين فيما بينهما لأن العامل المشترك الأعظم بينهما هو 3.) ومن ثم توجد أعداد صحيحة x وy تحقق المعادلة $ax + by = 1$. وتتيح لنا حقيقة أننا نستطيع تمثيل العدد 1 بهذه الطريقة أن نعود لإكمال برهان تمهيدية إقليدس التي تنصُّ على أنه إذا كان حاصل ضرب العددين a وb يقبل القسمة على العدد الأولي p فإن أحد العددين على الأقل يقبل القسمة على p.

لنفترض أن p عدد أولي وأنه عامل من عوامل حاصل ضرب ab، حيث $ab = rp$. لنفترض أن p ليس عاملًا من عوامل تحليل العدد a. (إذا كان عاملًا من عوامله، نكون قد أثبتنا ما نريد.) إذَن، لأن p عدد أولي فإن القاسم المشترك الأعظم للعددين a وp يجب أن يكون 1، وباستخدام خوارزمية إقليدس يوجد عددان x وy يحققان: $ax + py = 1$. والآن:

$$b = b \times 1 = b\,(ax + py) = bax + bpy.$$

وبما أن $ba = pr$ فالمعادلة السابقة تصبح:

$$b = prx + pby = p(rx + by).$$

وهذه المعادلة توضح أن p عامل من عوامل b، وهو بالضبط ما نريد إثباته. ومن ثم تثبت خوارزمية إقليدس.

تعليق أخير: قوة النتيجة الرياضية ليست دائمًا واضحة. خوارزمية إقليدس تسمح لنا بكتابة القاسم المشترك الأعظم d في الصورة $ax + by$. من النظرة الأولى، قد يبدو أنه ليس هناك سبب لذلك. ولكن حقيقة أنه كان من الممكن كتابة 1 في صورة $ax + py$ في البرهان السابق هي التي سمحت لنا بإثبات تمهيدية إقليدس.

(٢) بعض الأشياء القديمة والجديدة اللافتة للنظر

لأن هذا الكتاب للفضوليين فسوف أعرض لبعض من المسائل الشهيرة التي لم تحل أو على الأقل صعبة الحل عن الأعداد.

(٢-١) حدسية جولدباخ

في القرن الثامن عشر اقترح جولدباخ أن كل عدد زوجي أكبر من 2 يمكن كتابته على شكل مجموع عددين أوليين. ويبدو أن هذا صحيح وعادة توجد طرق كثيرة لتوضيحه، فمثلًا $5 + 13 = 7 + 11 = 18$، ويمكن أن تجرب بنفسك بعض الأعداد. هناك حالات أبسط من هذه الحدسية أمكن إثباتها، لكن الحدسية الأصلية لا تزال دون برهان. وأنا أشعر أنني غير مؤهل للحكم على أن حدسية جولدباخ مسألة «خطيرة»، لأنني لست متخصصًا في نظرية الأعداد. لقد سمعت أنها رفضت لمجرد أن الأعداد الأولية لم يكن الهدف منها أبدًا هو جمعها. وربما كان ذلك صحيحًا، ولكن مثل هذا الرد عليها يبدو ردًّا محبطًا إلى حدٍّ ما.

(٢-٢) مبرهنة فيرما الأخيرة

كانت مبرهنة فيرما الأخيرة واحدة من المسائل التي أخذت بجدية شديدة. وهذا يتطلب مقدمة صغيرة.

من الممكن أن يكون لديك مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه أعداد صحيحة. على سبيل المثال، حتى قدماء المصريين قدروا أن المثلث الذي أطوال أضلاعه $(3, 4, 5)$ هو مثلث قائم الزاوية؛ وهذا طبعًا يستنتج من نظرية فيثاغورث التي أثبتناها في الفصل

الثالث، حيث إن $3^2 + 4^2 = 5^2$. ويمكننا توليد أكثر من ثلاثي فيثاغورثي من هذا النوع بضرب الأعداد السابقة في 2 أو أي عامل آخر. ومع ذلك، يعتبر المثلث الذي أطوال أضلاعه $(6, 8, 10)$ مشابهًا للمثلث $(3, 4, 5)$؛ إذ إن له نفس الشكل لكنه ضعف الحجم. أي إن الاختلاف بين المثلثين ليس إلا في الحجم. ولكن يوجد ثلاثيات فيثاغورثية مختلفة تمامًا، مثل $(5, 12, 13)$ و$(8, 15, 17)$. ومن هنا نطرح سؤالًا: هل يمكن وصف كل ثلاثيات فيثاغورث (a, b, c) حيث a وb وc ليس بينها عامل مشترك غير 1؟ الإجابة نعم وإليك التفاصيل.

ها هي الطريقة. خذ أي عددين أوليَّين فيما بينهما m وn حيث $m > n$ ويكون أحدهما عددًا زوجيًّا. ضع $a = 2mn$، و$b = m^2 - n^2$، و$c = m^2 + n^2$. عندئذٍ يكون الثلاثي (a, b, c) هو ثلاثيًّا فيثاغورثيًّا حيث الأعداد a, b, c ليس بينها عامل مشترك. هذا من السهل إثباته؛ وبالتأكيد إذا كنت بارعًا في الجبر فيمكنك التأكد من أن: $a^2 + b^2 = c^2$. الجزء الصعب هو إثبات أن العكس أيضًا صحيح: أي لأي ثلاثي فيثاغورثي من الأعداد (a, b, c) ليس بينها عامل مشترك يوجد عددان صحيحان أوليان فيما بينهما، m وn، وأحدهما عدد زوجي حيث a, b, c تعطى بالمعادلة السابقة. إلا أن كل ذلك قد تم إثباته من زمن طويل ولن نكرر التفاصيل هنا مع أنها ليست صعبة جدًّا.

نحن نبحث الآن عن قوى أكبر من 2. ما أكده فيرما في أوائل القرن السابع عشر هو أنه من المستحيل إيجاد عددين مكعبين مجموعهما عدد مكعب آخر، ومن المستحيل إيجاد عددين مرفوعين للقوة 4 ويكون مجموعهما عددًا مرفوعًا للقوة 4. أي إن لأي $n \geq 3$ لا توجد أعداد صحيحة كحل للمعادلة:

$$x^n + y^n = z^n.$$

فيرما ادَّعى أن لديه برهانًا رائعًا لهذه الحدسية التي ظهرت كملاحظة على هامش واحدة من مخطوطاته. وأضاف أن الهامش صغير جدًّا لاحتواء الإثبات، ولهذا لم يحدث قطُّ أنه كتب البرهان. وقد كتب فيرما عددًا من الملاحظات المماثلة على الهوامش كلها تم برهانها إلا هذه الحدسية؛ ولهذا سُميت بهذا الاسم: «مبرهنة فيرما الأخيرة».

للوهلة الأولى لا تبدو هذه المسائل ذات أهمية خاصة، لكن سيكون هذا حكمًا سطحيًّا خاطئًا تمامًا لأن الكثير من الرياضيات الرائعة قد نتجت من دراسة مبرهنة فيرما الأخيرة أكثر من أي مسألة أخرى. ولحسن الحظ فإن المسألة قد حُلت تمامًا، كما تنبأ فيرما،

بواسطة أندرو وايلز في التسعينيات من القرن العشرين، من خلال إثبات حدسية عميقة جدًّا عمَّا يسمى المنحنيات الإهليلجية والأشكال النمطية، التي ليست لها صلة واضحة بمبرهنة فيرما. ويعد البرهان الذي لاقى ترحيبًا هائلًا على أنه برهان القرن، برهانًا شديد العمق لدرجة أن عددًا قليلًا جدًّا — يُعَد على أصابع اليد — من الناس يستطيعون ادعاء أنهم فهموه تمامًا. وقد كان ثمة نسخة مبكرة من البرهان، أعتقد أنها كاملة، ولكن تبين أن بها خطأ جوهريًّا، وقد نجح وايلز في حل هذا الخطأ وإثبات المبرهنة فيما بعد. ويمثل عمل وايلز مؤكدًا جهدًا ملهمًا للعبقرية البشرية حتى لو كان الإعجاب به من بعيد.

من المؤسف أن أندور وايلز لن يُكرَّم على هذا الإنجاز بالحصول على جائزة نوبل. فلا توجد جائزة نوبل للرياضيات.

وماذا عن برهان فيرما الأصلي؟ برهان وايلز يعتمد على عدد هائل من إنجازات الرياضيين في القرن التاسع عشر والقرن العشرين؛ ومن ثَم فهو خارج أي شيءٍ كان يمكن لفيرما الوصول إليه أثناء حياته. وأيًّا كان ما كان بيير دو فيرما يفكر فيه عندما كتب ملحوظته على الهامش فإنه سيظل غامضًا، ربما للأبد.

(٢-٣) صيغ الأعداد الأولية

إنني لا أنصح القارئ بالانغماس في التنقيب لإيجاد إحدى هذه الصيغ، على الرغم من أنه من الطبيعي لأي شخصٍ أن يبحث عن نمطٍ بين الأعداد الأولية. ونقصد بالصيغ الخاصة بالأعداد الأولية نوعًا من الدوال، $f(n)$، حيث إن لأي عدد طبيعي $n, f(n)$ هو العدد الأولي الذي ترتيبه n. مثل هذا القانون يجب أن يبدأ بالقيم:

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5, \ldots, f(10) = 29, \ldots$$

نحن نعرف، على نحو قاطع (ولكنه غير مجدٍ) ما هي $f(n)$: هي قيمة العدد الأولي ذي الترتيب n. المزعج في الأمر عامة أنه ليس لدينا طريقة سهلة لحساب $f(n)$. يمكننا أن نبدأ بهدف أكثر تواضعًا وهو التأكيد على أن قيمة الدالة $f(n)$ لكل n هي عدد أولي أكبر من العدد الأولي $f(n-1)$. بعبارة أخرى، يمكننا أن نرضى بصيغة تنتج تسلسلًا متزايدًا من الأعداد الأولية، حتى إذا كان بعضها مفقودًا.

من المؤكد أن صيغة مثل $f(n) = 6n + 1$ لا يمكن أن تكون صحيحة. (فهي تثبت خطأها لأول مرة عند $n = 4$.) فلنأخذ أي صيغة في الصورة $f(n) = an + b$ حيث b

وa أعداد صحيحة. ومن الميئوس منه أخذ $a = \pm 1$ لأن هذه الصيغة تعطينا كل عدد ابتداء من b فصاعدًا حيث $a = 1$، وكل عدد ابتداء من b فنازلًا إذا كانت $a = -1$؛ ولهذا لنفترض أن $a \neq \pm 1$. عندئذٍ فإن $f(b) = ab + b = b(a+1)$ ومن ثم فهو عدد مؤلف إلا إذا كانت $b = \pm 1$ ومع ذلك قد يكون عددًا أوليًّا. ولنفترض عندئذٍ أن $b = 1$. في هذه الحالة، يمكن أن نحصل على عدد مؤلف بوضع $n = a + 2$ لأن:

$$f(a+2) = a(a+2) + 1 = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2,$$

وهو عدد مربع، ومن ثَم فهو عدد مؤلف. (على سبيل المثال، إذا كان $a = 6$، فإننا نحصل على:$f(8) = 6 \times 8 + 1 = 49 = 7^2$.) وإذا جربنا $b = -1$، سوف نجد صعوبة عند وضع $n = a : f(a) = a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$. (على سبيل المثال، إذا كانت $a = 6$ نحصل على: $f(6) = 6 \times 6 - 1 = 35 = 7 \times 5$.)

ربما تحدوك الرغبة في تجربة الصيغ التي تحتوي على قوى أعلى لـ n مثل $f(n) = n^2 + n + 41$، ولكن من الممكن دائمًا، باستخدام طريقة أكثر تعقيدًا إلى حد ما من الطريقة السابقة، أن نجد مدخلًا ينتج مخرجات صحيحة. هذا المثال للدالة التربيعية، وفقًا لأويلر، هو مثال رائع، من منطلق أنه يعطي الأعداد الأولية لثمانين عددًا صحيحًا متتاليًا: $n = -40, -39, \ldots, 39$. فمثلًا بأخذ $n = 7$ نحصل على العدد الأولي 97. ويمكنك اختبار ذلك لقيم n المختلفة. على الرغم من ذلك، فإن الصيغة تفشل عندما تكون $n = 40$ لأن: $f(40) = 1681 = 41 \times 41$. ويمكنك أن تتوقع هذا إذا استخدمت التحليل البسيط التالي:

$$\begin{aligned} f(40) &= 40^2 + 40 + 41 = 41(40+1) + 41 \\ &= 40 \times 41 + 41 = (40+1)41 = 41^2. \end{aligned}$$

لنلقِ نظرة على بعض المسائل الأخرى في موضوع الأعداد الأولية. من المحتمل أن نجد، على نحو عشوائي، سلسلة طويلة من الأعداد المتتالية لا تحتوي على أي عدد أولي. وينطوي أحد البراهين على استخدام المضروب. العدد $n!$ (ويقرأ مضروب n) هو حاصل ضرب:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

(على الرغم من أننا نستطيع الاستغناء عن الضرب $1 \times$ لأنه لا يؤثر). ويزيد المضروب بسرعة كبيرة؛ فمثلًا $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$، وبسرعة نصل إلى مليارات عديدة. تظهر هذه الدالة باستمرار في المسائل التي تنطوي على العد والاحتمالات، مثل إيجاد احتمالات الفوز في اليانصيب القومي (حوالي 1 في $14,000,000$، انظر الفصل السادس). نستخدم حقيقة أن $n!$ له عوامل عديدة بما فيها كل الأعداد $2, 3, \dots, n$، لتكوين متتابعة من n من الأعداد المؤلفة المتتالية لأي عدد n. لنأخذ الأعداد التالية في الاعتبار:

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \dots, (n+1)! + n + 1.$$

توجد أعداد متتالية عددها n في هذا التعبير. العدد الأول يقبل القسمة على 2؛ لأن الحدَّين $(n+1)!$ و2 كلاهما عدد زوجي؛ والعدد الثاني يقبل القسمة على 3 لأن 3 أيضًا أحد عوامل $(n+1)!$ ولا شك أنها عامل من عوامل تحليل 3؛ وهكذا بحيث يكون العدد الأخير أحد عوامله هو $n + 1$. بشكل خاص، لا يعتبر أيٌّ من هذه الأعداد عددًا أوليًّا. ومن ثَم فإن المتتابعة تمثل قائمة تحتوي على n من الأعداد المؤلفة المتتالية.

هذه المتتابعة تستخدم أيضًا لإثبات أنه لا توجد متتابعة بالصيغة $an + b$ تتكون فقط من أعداد أولية لأن الفرق المشترك بين أي حدين متتاليين في هذه المتتابعة يكون دائمًا العدد a، لكننا أوضحنا أن الفجوة بين عددين أوليين متعاقبين يمكن أن تكون كبيرة جدًّا.

يُعرف الكثير عمومًا عن وتيرة ظهور الأعداد الأولية. يوجد على الأقل عدد أولي واحد p بحيث يكون $n < p < 2n$ لأي $n \geq 2$، والرمز $\frac{n}{p(n)}$ (حيث $p(n)$ ترمز لعدد الأعداد الأولية الأقل من أو التي تساوي n) هي نسبة تَئول إلى $\log_e n$ عندما تكبر n بلا حد، وتسمى اللوغاريتم الطبيعي للعدد n.

توجد صيغ للأعداد الأولية: إحداها تعد أقربَ إلى إعادة صياغة المسألة مما ينتج صيغة، ورغم أن هذه الصيغة تبدو رائعة، فإنها لا يمكن استخدامها إلا إذا كنا نعلم جميع الأعداد الأولية من الأساس. أما الثانية فهي صيغة حقيقية، لكنها تتطلب كمًّا هائلًا من الحسابات لاستخدامها، ومن ثَم فهي لا تقوم بالعمل أيضًا.

وحيث إنه لا توجد صيغة مفيدة للأعداد الأولية، فإننا نعرف أكبر عدد أولي متاح في أي لحظة. ويعد العدد الفائز في أي مرحلة هو العدد الأولي لميرسين، أي العدد الأولي على الصورة $2^p - 1$ حيث p عدد أولي أيضًا. ورغم أنه من المعروف أن أعداد ميرسين ليست

دائمًا أولية (على سبيل المثال، العدد $2^{67} - 1$ يقبل القسمة على 193، و707، و221)، فيمكن إثبات أن أي قاسم لعدد ميرسين يكون على الصورة $2kp + 1$ للعدد k الصحيح الموجب. وهذا يجعل هذه الأعداد مرشحة لأن تكون أعدادًا أولية. على سبيل المثال، فلنختبر عدد ميرسين $2047 = 1 - 2^{11}$ لنعرف إن كان أوليًّا أم لا.

أولًا: تجدر الإشارة إلى أن أي عدد مؤلف n لا بدَّ أن يكون له عامل لن يكون أكثر من $\sqrt{n}$ لأن العوامل تظهر في أزواج، ومن المستحيل أن يزيد أيٌّ منها عن $\sqrt{n}$؛ لأنه في هذه الحالة سيزيد حاصل ضربهما عن n. فمثلًا $11 \times 7 = 77$ حيث 7 عامل من عوامل تحليل 77 أقل من $\sqrt{77}$ الذي يقع بين 8 و9. ولأن أي عامل هو نفسه له عامل أولي، فمن ثَم لأجل إثبات أن عدد n هو عدد أولي، يكفي أن تتحقق أنه ليس له عوامل أولية أقل من أو تساوي $\sqrt{n}$. ولكي نتحقق مما إذا كان $2^{11} - 1 = 2047$ عددًا أوليًّا أم لا، نحتاج فقط لاختبار قابلية القسمة على أعداد أولية بالصيغة $22k + 1$ أقل من 46 حيث $46^2 > 2047$. يوجد فقط عدد أولي واحد، بوضع $k = 1$ نجد أن 23 هو العامل الأولي الممكن. فعلًا إذا قسمنا على 23 نحصل على $89 \times 23 = 2047$. في الحقيقة العدد 2047 هو أول عدد مؤلف من أعداد ميرسين. (يلاحظ أن 89 أيضًا على الصيغة $22k + 1$.)

حتى عدد ميرسين الكبير نسبيًّا $M = 2^{19} - 1 = 524,287$ يمكن إثبات أنه عدد أولي بالحسابات اليدوية. في هذه المرة نبدأ بملاحظة أن $M < 725^2$؛ ومن ثم فالأعداد الأولية بالصيغة $38k + 1$ التي لا تزيد على 724 يجب أن يتم اختبارها. وفقط قيم $k = 5, 6, 11, 12, 15, 17$ تُعطى هذه الأعداد الأولية، ويتم تنفيذ القسمة ست مرات.

ليست جميع المسائل البسيطة التي لم نجد لها حلًّا مسائل قديمة. فقد لوحظ حديثًا أنه بالبدء بأي عددٍ طبيعي n يبدو أن الطريقة الآتية تنتهي دائمًا بالعدد 1. إذا كان n عددًا زوجيًّا، فاقسمه على 2، وإذا كان n عددًا فرديًّا، فاضرب في 3 وأضف 1. على سبيل المثال، إذا بدأنا بالعدد 7 وتتبعنا القاعدة السابقة نحصل على المتتابعة التالية:

$$7 \longrightarrow 22 \longrightarrow 11 \longrightarrow 34 \longrightarrow 17 \longrightarrow 52 \longrightarrow 26 \longrightarrow 13 \longrightarrow 40$$
$$\longrightarrow 20 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5 \longrightarrow 16 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1.$$

بلا شك جرى اختبار هذه الحدسية لكل قيم n حتى عدد كبير جدًّا، لكن حتى الآن لم يحصل أحد على سبب حدوث هذا في كل مرة.

(٣) مثلث باسكال والمجموعات الفرعية للعد

ثمة نوع أساسي من الأعداد يُطلَق عليه اسم «المعامل ذو الحدَّين». وسبب هذه التسمية سوف يتضح في الفصل التالي. أمَّا الآن، فسوف نستخدم عددًا ذا حدَّين $C(n, r)$، لعدد المجموعات المختلفة المكونة من كائنات r التي يمكن اختيارها من مجموعة كائنات n. هذه الأعداد تحولت لتصبح طيِّعة للاستخدام للإجابة عن أسئلة لم يكن من الممكن الإجابة عنها دونها. فمثلًا حاصل ضرب أربعة أعداد صحيحة متتالية هو دائمًا مضاعف لـ $24 = 4!$ أي إن:

$$17 \times 18 \times 19 \times 20 = 24 \times 4845.$$

بالمثل فإن حاصل ضرب خمسة أعداد متتالية هو مضاعف للعدد $120 = 5!$ وعامة $r!$ دائمًا ما يكون عاملًا من عوامل حاصل ضرب أي عدد r من الأعداد الصحيحة المتتالية. وسوف تتضح صحة هذا إذا علمنا قليلًا عن تكوين الأعداد ذات الحدَّين.

كما سأبين لك، تظهر جميع الأعداد ذات الحدين في المصفوفة التي يُطلق عليها مثلث باسكال (شكل ٤-١)، وسوف نرى أن الصف ذا الترتيب n، عند قراءته من اليسار إلى اليمين، يتكون من الأعداد: $C(n, 0), C(n, 1), \cdots, C(n, r), \ldots, C(n, n)$. وسوف أشرح كيفية توليد صفوف المثلث بعد قليل، مع أنك قد ترغب في اكتشاف النمط بنفسك.

يمكننا بسهولة اختبار بعض الصفوف الأولى للمثلث بالفحص. فمثلًا العدد 6 في منتصف الصف الرابع مثلًا يعني أن $C(4, 2) = 6$، وهذا صحيح لأنه يوجد ست طرق لاختيار شخصين (زوج من الأشخاص) من مجموعةٍ مكوَّنةٍ من أربعة أشخاص $\{A, B, C, D\}$، وستكون الأزواج الستة بدون ترتيب هي: AB, AC, AD, BC, BD, CD.

ثمة تماثل واضح في مثلث باسكال؛ حيث يمكن قراءة كل صف من الخلف تمامًا كما يقرأ من الأمام. وفيما يتعلق بالأعداد ذات الحدَّين، نجد أن $C(n, r) = C(n, n - r)$؛ فمثلًا العدد 56 الذي ظهر مرتين في الصف الأخير يوضح أن $C(8, 3) = C(8, 5)$. ومع ذلك، فهذا الأمر ليس مفاجئًا إذا فكرت فيه: عندما تختار ثلاثة أشخاص من مجموعة تحتوي على ثمانية أفراد، فأنت في الوقت نفسه تختار خمسة أشخاص؛ وهم الخمسة الذين ستتركهم. ومن ثَم فإن عدد طرق اختيار ثلاثة من ثمانية هو نفسه عدد الطرق لاختيار خمسة من ثمانية.

مثلث باسكال

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

•

•

•

شكل ٤-١

ما قاعدة كتابة الصف التالي في مثلث باسكال؟ كل عدد في الصف (بعيدًا عن أعداد البداية والنهاية التي هي دائمًا 1) يمكن الحصول عليه بجمع العددين في الصف الأعلى منه مباشرة. فمثلًا العدد 28 في الصف الثامن يأتي من جمع 21 + 7. ماذا يوضح لك ذلك عن الأعداد ذات الحدين؟ إنه يوضح أن: $C\,(8,3) = C\,(7,2) + C(7,3)$ وعمومًا:

$$\mathrm{C}(n,r) = \mathrm{C}(n-1,r-1) + \mathrm{C}(n-1,r).$$

إذا استطعنا تفسير لماذا يحدث هذا، يمكننا استنتاج أن مثلث باسكال يعطينا بالفعل كل الأعداد ذات الحدَّين. لنبحث حالة $\mathrm{C}(8,3)$، على الرغم من أن ما سأقول ينطبق أيضًا على الحالة العامة. لتبسيط الأمر، لتكن المجموعة المكوَّنة من ثمانية عناصر هي $A = \{1,2,3,\ldots,8\}$. والمجموعات الثلاثية التي يمكن اختيارها من A هي من نوعين مختلفين: المجموعات التي تحتوي على 8 والمجموعات التي لا تحتوي عليه. لاختيار مجموعة من النوع الأول نأخذ العدد 8 ثم نأخذ عددين من 1 إلى 7: من التعريف توجد $\mathrm{C}(7,2)$ من الطرق لعمل ذلك. من ناحية أخرى إذا لم نأخذ 8 ليكون أحد اختياراتنا يمكن اختيار الثلاثة الأعداد من السبعة الأولى، وهو ما يمكن القيام به باستخدام $\mathrm{C}(7,3)$ من الطرق. فإذا جمعنا الاحتمالَين معًا فسنحصل على النتيجة المذكورة $\mathrm{C}(8,3) = \mathrm{C}(7,2)+\mathrm{C}(7,3)$.

وهذه الحجة تنطبق أيضًا على الحالة العامة؛ فكل ما عليك أن تفعله هو التعويض عن 8 بالعدد n، والتعويض عن 3 بالعدد r في المعادلة السابقة.

مثلث باسكال يمدنا بطريقة لحساب أيٍّ مِن الأعداد ذات الحدين $C(n,r)$، رغم أننا يجب أن نجد أولًا الأعداد في كل الصفوف السابقة. وسيكون من الأفضل أن نجد صيغة للعدد $C(n,r)$، أي أن نجد تعبيرًا للعدد بدلالة n وr فقط. والهجوم المباشر على المسألة يُسفر عن هذه المكافأة. مرة أخرى دعونا ننظر إلى $C(8,3)$.

عدد طرق اختيار ثلاثة كائنات بالترتيب من ثمانية هو $8 \times 7 \times 6$؛ حيث إن نفس الكائن لا يمكن اختياره مرتين؛ أي إن عدد الاحتمالات الممكنة لاختيار الكائن التالي تقل بمقدار 1 في كل مرة. وكل مجموعة من ثلاثة كائنات تعطي $3 \times 2 \times 1$ من الترتيبات؛ أي إن عدد المجموعات المختلفة المكونة من ثلاثة هي:

$$\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56.$$

يسمح لنا استخدام نفس هذا المنطق بشكل عام، باستنتاج أن $C(n,r)$ يساوي حاصل ضرب r من الأعداد الصحيحة المتتالية من n تناقصيًّا مقسومًا على $r!$. بعبارة أخرى:

$$C(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}. \qquad (4\text{–}4)$$

يلاحظ أن آخر حد في البسط هو $n-r+l$ وليس $n-r$ لأن أول حد هو $n = n-0$ وليس $n-1$؛ فمثلًا عند $n = 8$ و$r = 3$ فإن الحد الأخير $6 = 1 + 3 - 8$، كما رأينا سابقًا.

لأننا أحرار في اختيار n أي عدد أكبر من أو يساوي r، فإن البسط في التعبير (4–4) يمكن جعله كحاصل ضرب أي r من الأعداد الموجبة المتتالية. ولأن $C(n,r)$ بلا شك عدد صحيح وليس كسرًا فإن حاصل ضرب أي r من الأعداد الصحيحة المتتالية يقبل القسمة على $r!$. فمثلًا حاصل ضرب $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11$ هو مضاعف للعدد $5! = 120$ بوضع $n = 15$ و$r = 5$ في (3–1) نحصل على:

$$C(15,5) = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{5!}.$$

تعبير آخر مختصر للتعبير (4-4) يمكن الحصول عليه بملاحظة أن البسط يساوي $\frac{n!}{(n-r)!}$. مرة أخرى بأخذ المثال حيث $n = 8$ و$r = 3$، نقول إن:

$$8 \times 7 \times 6 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!}.$$

ونحصل عليه فورًا من خلال الحذف. وهذا يعطي التعبير القياسي لـ $\mathrm{C}(n, r)$:

$$\mathrm{C}(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{4-5}$$

هذا الشكل من الأعداد ذات الحدَّين أيضًا يوضح أن: $\mathrm{C}(n, r) = \mathrm{C}(n, n-r)$ عندما نبدل $n - r$ بالعدد r في الطرف الأيمن من (4-5) ونحصل على نفس التعبير لأن: $n - (n - r) = n - n + r = r$.

الفصل الخامس

الجبر

لقد قيل إن بعض رجال القبائل الإثيوبية لم يكونوا ليسمحوا إلا بعمليات الضرب الخاصة بالمضاعفة والتنصيف فحسب، والأكثر من ذلك أنهم لم يكونوا ليتعاملوا مع الكسور من أي نوع. ومع ذلك فلم تكن لديهم أي مشكلة في ضرب أي عددين معًا؛ ومن ثم في إجراء عمليات التجارة الأساسية. فمثلًا إذا اشترى أحدهم 31 خروفًا من آخر بسعر 25 جنيهًا إسترلينيًّا للواحد، فالطريقة لإيجاد التكلفة الإجمالية هي كما يأتي:

نشكل عمودين على رأسهما العددان 25 و31 على الترتيب. ثم نضاعف الرقم الموجود على اليمين وننصِّف الرقم الموجود على اليسار مع إهمال أيِّ باقٍ $\frac{1}{2}$ ناتج من تنصيف العدد الفردي. ونواصل هذا العمل حتى نحصل على 1 في العمود الأيسر قم بحذف:

25	31
12	62
6	124
3	248
1	496

الصفوف التي تحتوي على أعداد زوجية في العمود الأيسر، أي الصفوف التي تحتوي على 12 و6. والآن اجمع الأعداد الباقية في العمود الأيمن لتعطينا 775 = 496 + 248 + 31، وهي الإجابة الصحيحة.

إذا كان هذا الأسلوب الأفريقي للضرب يبدو غامضًا لنا، فبلا شك سيبدو أسلوبنا كذلك بالنسبة لهم. فهل يمكنك شرح طريقتهم؟ وهل يمكن شرح طريقتك؟ في الحقيقة الطريقتان تعتمدان على نفس الفكرة، وهو نفس الجانب من الجبر، ويُعرف باسم: «قانون التوزيع» وهو الموضوع الرئيسي لهذا الفصل. وسوف نعود لمسألة التجار الإثيوبيين بعد قليل.

على أية حال، أودُّ البَدء بكلمة عن وضع الأقواس. عندما نكتب $2 + 4 + 7$ فنحن لا نشعر بالحاجة للأقواس لأن الطريقتين البديلتَين في حساب المجموع يؤديان إلى نفس الإجابة:

$$(2 + 4) + 7 = 6 + 7 = 13; \quad 2 + (4 + 7) = 2 + 11 = 13.$$

مما سبق يتضح أن عملية الجمع تجميعية. وينطبق الشيء نفسه على عملية الضرب؛ أي إنه لأي ثلاثة أعداد a وb وc يكون $(ab)c = a(bc)$.

أما عند دمج هاتين العمليتين، ففي هذه الحالة تكون الأقواس ضرورية:

$$2 + (4 \times 7) = 2 + 28 = 30; \quad (2 + 4) \times 7 = 6 \times 7 = 42.$$

ماذا يعني $2 + 4 \times 7$؟ هذا التعبير سيكون في الحقيقة غامضًا لولا أنه يوجد عُرف أو قاعدة تقتضي أن عملية الضرب تسبق عملية الجمع، بمعنى أن $2 + 4 \times 7$ يعني ضمنيًّا أنه على الصورة $2 + (4 \times 7)$. أما إذا كنت تريد أن يتم الجمع أولًا، فعليك أن توصل ذلك من خلال استخدام الأقواس: $(2 + 4) \times 7$.

كلٌّ منا لديه بعض الخبرة في مسائل الجبر أو الحساب التي تحتوي على بعض الصعوبة من أيام المدرسة؛ إذ كان يجب أن تكون أكثر حذرًا عند التعامل مع المسائل التي تحتوي على علامة الطرح والأقواس. ويرجع السبب الرئيسي في ذلك إلى أن عمليات الطرح ليست تجميعية. وعند إجراء عمليتي طرح متتاليتين، فإن الأقواس تكون مهمة:

$$9 - (4 - 2) = 9 - 2 = 7, \quad (9 - 4) - 2 = 5 - 2 = 3.$$

ومرة أخرى، فإن العُرف هو أن $9 - 4 - 2$ بدون أقواس تعني ضمنيًّا $(9 - 4) - 2$؛ أي إن الكميات تُطرح بترتيب ورودها. ومع ذلك، فإن احتمالات التفسير الخاطئ كبيرة؛

ولهذا السبب كثيرًا ما نرى أن أول زوج من الأقواس يكتب بوضوح لمجرد أن نتفادى حدوث أخطاء. نفس الشيء ينطبق على عمليات القسمة: فالقسمة ليست عملية تجميعية؛ ومن ثم فإن الأقواس ليست إضافة اختيارية.

$$(32 \div 8) \div 2 = 4 \div 2 = 2; \quad 32 \div (8 \div 2) = 32 \div 4 = 8.$$

مرة أخرى، إذا ما كتبنا $32 \div 8 \div 2$ فإننا نعني بذلك $(32 \div 8) \div 2$ ولكن للسبب نفسه كما في السابق، فإن وضع الأقواس لا يكون إلا للتوضيح. ولأن عملية القسمة ليست تجميعية، فمن الأفضل تحاشي كتابة الكسور المكونة من طابقين، فهي تبدو قبيحة، كما أن المعنى يكون غامضًا دون وضع الأقواس:

$$\frac{\frac{32}{8}}{2} = 2; \quad \frac{32}{\frac{8}{2}} = 8.$$

قانون التوزيع هو الأكثر خصوصية والأقل وضوحًا بين جميع قوانين الجبر. وتأتي خصوصيته من حقيقة أنه القانون الوحيد الذي يربط العمليتين الأساسيتين في الحساب وهما عمليتا الجمع والضرب؛ وهو القانون الذي يدلنا على كيفية ضرب الأقواس:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

فمثلًا $4(2 + 3) = 4 \times 2 + 4 \times 3$ وهي بالتأكيد صحيحة حيث: $4(2 + 3) = 4 \times 5 = 20 = 8 + 12$. وإذا بذلت مجهودًا في التفكير للحظةٍ في هذا المثال، فستتمكن من أن ترى ما يحدث. على أحد جانبي هذا المجموع لدينا:

$$4(2 + 3) = (2 + 3) + (2 + 3) + (2 + 3) + (2 + 3),$$

وعلى الجانب الآخر:

$$(2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3 + 3).$$

الطرفان كمجموعين يحتويان على نفس الأعداد لكنها مجموعة بترتيب مختلف؛ ومن ثم لا يوجد فرق. (وهذا قانون أيضًا يُطلق عليه قانون الإبدال في الجمع: $a + b = b + a$.) الحالة العامة تنطبق لنفس السبب، حيث:

$$\underbrace{(b+c)+(b+c)+\cdots+(b+c)}_{a \text{ times}} = \underbrace{(b+b+\cdots+b)}_{a \text{ times}} + \underbrace{(c+c+\cdots+c)}_{a \text{ times}}.$$

المهارة في قانون التوزيع تأتي من استخدامه في الاتجاه المعاكس لكتابة مجموع ما في صورة حاصل ضرب باستخراج عامل مشترك. وبدلًا من استخدام الكثير من الأقواس فإن هناك عملية ميكانيكية تمامًا موضحة أدناه، ألا وهي التحليل، وتنطوي على التفكير في تعبير ما واستخراج عامل مشترك. وهو يتطلب من الطالب حسن التقدير، فهو الذي يقرر هل هذا التحليل مناسب وسيساعد في تبسيط التعبير الجبري المُعطى. وهذا يتطلب خبرة كبيرة مناسبة، لكنه جزء لا بد منه في عملية التعليم. ويحتاج الطلاب الجادون في المواد التي تعتمد على الحساب أن يكونوا قادرين على التعامل بسهولة مع الجبر ويعرفوا كيفية استخدام قانون التوزيع في كلا الاتجاهين.

وقد ظهر مثال على طريقة التحليل هذه في الفصل الرابع حين تأكدنا أن $40^2 + 40 + 41 = 41^2$: وقد استُخدم قانون التوزيع في هذا المثال مرتين. بل إن قانون التوزيع يُستخدم عندما نقوم بأي عملية ضرب عادية، غير أننا قد نفعل ذلك على نحو تلقائي. وتعتمد طريقتنا على ثلاثة أشياء: معرفة جداول الضرب حتى جدول 10 (أساس النظام العددي)، ومعرفة أنه عند الضرب في 10 فإننا ببساطة نضيف 0 إلى النهاية اليمنى للعدد المطلوب ضربه، وأخيرًا معرفة قانون التوزيع.

على سبيل المثال، قم بضرب 32 في 7:

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 7 \\ \hline 224 \end{array}$$

كل ما قمت به في الحقيقة هو عمليتا ضرب صغيرتان مستخدمًا معرفتك بجدول الضرب، ثم ضربت في 10، وأخيرًا أكملت العملية بجمع الإجابات معًا. وفيما يلي ما تنطوي عليه

هذه الطريقة إذا ما كتبناها بوضوح:

$$32 \times 7 = (30 + 2) \times 7 = 30 \times 7 + 2 \times 7.$$

لقد استخدمنا قانون التوزيع لتجزئة عملية الضرب إلى مجموع عمليتَي ضرب أبسط. بعد ذلك نقول:

$$30 \times 7 + 2 \times 7 = 30 \times 7 + 14 = (30 \times 7 + 10) + 4.$$

وتنطوي الخطوة الأولى على معرفتك بجدول ضرب 2، ثم الخطوة التالية تُسمى «الحمل» حيث تأخذ 10 التي ظهرت وتحملها إلى خانة العشرات. والآن أصبح الرقم الموجود في خانة الآحاد ثابتًا. ثم نستمر، وتُبرَّر الخطوات التالية بخاصية الإبدال في الضرب (أي إن الأعداد تُضرب بأي ترتيب)، وبمعرفة جدول ضرب 3، وقانون التوزيع مرة أخرى، وقاعدة الضرب في 10 وأخيرًا عملية الجمع البسيطة:

$$= (3 \times 10 \times 7 + 10) + 4 = (3 \times 7 \times 10 + 10) + 4$$

$$= (21 \times 10 + 10) + 4 = (21 + 1) \times 10 + 4$$

$$= 22 \times 10 + 4 = 220 + 4 = 224.$$

قد تشعر بشيء من الانزعاج من هذا المستوى التفصيلي للتفسير. جزء من السبب في ذلك أنني أشرح شيئًا مألوفًا تمامًا — الضرب البسيط — باستخدام أفكار قد تكون غير مألوفة، وهي قوانين الحساب. فإذا كان هذا يزعجك، فببساطة شديدة تجاهله تمامًا، ولكن لاحظ نقطة واحدة عامة: كل طريقة حسابية تعتمد في تفسيرها على مجموعة صغيرة من قوانين الحساب البسيطة جدًّا، ومن هذه القوانين قانون التوزيع. ومع ذلك، آمُل أن تساعد قوانين الحساب في توضيح الطريقة الإثيوبية للضرب لأنك، ما لم تكن إثيوبيًّا، ستشعر في الغالب بأنها تحتاج إلى التوضيح.

دعونا الآن نَعُد إلى مسألة الضرب الإثيوبية بكل ما فيها من مضاعفةٍ وتنصيف، مع إهمال الأنصاف وحذف الصفوف الزوجية، ثم جمع الباقي. قد يبدو هذا محيرًا لنا، لكن عند تحليله، سنجد أنه مدعوم بقوة بقانون التوزيع.

أولًا: دعنا نُلقِ نظرة على مثال يوضح النهج الأفريقي تمامًا. الفكرة الأساسية هي حساب ab بالاستعاضة عنها بـ $2b \cdot \frac{a}{2}$. إذا كان أحد الأعداد قوة للعدد 2، فإن الطريقة تصير مباشرة. على سبيل المثال، لحساب 40×16 فإن رجل القبيلة الإثيوبي سيقول:

$$16 \times 40 = 8 \times 80 = 4 \times 160 = 2 \times 320 = 1 \times 640 = 640.$$

وفي هذه الحالة كل صف باستثناء الصف النهائي يبدأ بعدد زوجي؛ ومن ثم سيتم حذف جميع الصفوف باستثناء الصف الأخير.

كل هذا واضح بما فيه الكفاية. أما النقطة الغامضة في هذه الطريقة، فتنشأ عندما نقابل عددًا فرديًّا في العمود الأيسر. دعونا ننظر بإمعان في هذا الأمر. فلنفترض أن أحد الصفوف ab حيث a عدد فردي. ما نفعله في هذه المرحلة هو أننا نكتب مكان a، $(c+1)$ حيث $c = a - 1$ ثم نفك المقدار باستخدام قانون التوزيع:

$$ab = (c + 1)b = cb + b.$$

ثم نستمر بإيجاد حاصل ضرب cb؛ إلا أننا لا نستطيع تناسي العدد الزائد b، وهذا هو السبب في أن الأعداد في العمود الأيمن التي تبدأ بعدد فردي لا يمكن التخلص منها ولكن تكون جزءًا من المجموع النهائي. كان الإثيوبيون يبدون وكأنهم يهملون الكسور التي تنشأ في الحسابات، ولكن حساباتهم كانت في الحقيقة سليمة. فلنعد للمثال الذي ذكرناه في بداية هذا الفصل مستخدمين طريقتنا الحديثة لتوضيح الطريقة الإثيوبية:

$$25 \times 31 = (24 + 1) \times 31 = 24 \times 31 + 31 = 12 \times 62 + 31.$$

نرى أنه عند الانتقال من الصف الأول للثاني فإن 25 يحلُّ محلَّها 24، ثم يتم تنفيذ خطوة التنصيف والمضاعفة، ثم ننتقل إلى الصف الثاني؛ ومع ذلك فلا نغفل أن 1×31 يبقى في الخانة الثانية من الصف الأول في انتظار أن نجمعه بعد ذلك.

ثم نستمر في ذلك فنحصل على:

$$= 6 \times 124 + 31 = 3 \times 248 + 31 = (2 + 1) \times 248 + 31$$

$$= 2 \times 248 + 248 + 31 = 496 + 248 + 31 = 775.$$

مع أن هذه الطريقة قد لا تكون مريحةً بالنسبة لنا، فإن الطريقة الإثيوبية صحيحة تمامًا كما هو الحال في كثير من الطرق الأخرى المستخدمة في الضرب. وهذه نقطة نفسية مهمة. فعندما نقوم بعمليات حسابية عقلية، فإن كلًّا منا يبدو أن له طريقته الخاصة. ولا غبار على ذلك، شريطة أن يصل الجميع للنتائج نفسها. والناس غالبًا ما يخجلون من طريقة أدائهم للأشياء خوفًا من أن يقال إنهم يقومون بالعمل بأسلوب خاطئ.

لقد شُجِّعنا جميعًا على القيام بالعمليات الحسابية ذهنيًّا، لكن عادة لم يخبرنا أحد عن كيفية عمل ذلك، وكثيرًا ما تُركنا لأساليبنا الخاصة. الطرق القياسية للقيام بعمليات الجمع مصممة بحيث يتم استخدام القلم الرَّصاص والورقة، حيث تملك ميزة كتابة الأعداد (عمليات الترحيل مثلًا) وتخزينها دون حاجة لتذكرها عند الانتقال إلى الخطوة التالية من الحسابات. ولذلك فإن هذه الطرق غير مناسبة للحساب الذهني؛ إذ إن من الصعب الاحتفاظ ببعض الأعداد في الذهن، وفي الوقت نفسه التعامل مع أخرى. عندما نتكلم عن الحساب العقلي، فأنت حر في أن تفعل أي شيء ما دام يؤدي للنتيجة. وإذا حاولت ذات مرة كتابة طريقتك لإقناع نفسك بأنها صحيحة، فإنك سترى في النهاية أن طريقتك تتم بنفس قوانين الحساب التي يستخدمها سائر الناس.

(١) من الحساب للجبر

ينطوي الجبر على إجراء الحسابات دون تعيين للأعداد، ويرمز لها برموز، بدلًا من تعيينها. وهذا يسمح لنا بوصف طريقة عامة ببساطة. من ناحية، يحتاج هذا إلى وقت للتعود عليه، ولكن من ناحية أخرى، بما أن قوانين الجبر يجب أن تكون مطابقةً لقوانين الحساب، فإن طريقة استخدامها لا تحوي الجديد. وذلك هو السبب في أن إجادة الحساب تؤدي إلى الكفاءة في الجبر.

دعونا نقدم بعضًا من عمليات الجبر الأساسية ونرَ ما يمكن عمله بها. باستخدام قانون التوزيع، يمكننا فك تعبير مثل $(x + y)^2$. في الوقت الحالي، لنجعل a ترمز للعدد $x + y$. ومن ثم:

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = a(x + y) = ax + ay.$$

والآن: $ax = xa = x(x + y) = x^2 + xy$؛ وبالمثل: $ay = ya = y(x + y) = yx + y^2$. وعند جمع القيمتين معًا نحصل على:

$$(x + y)^2 = ax + ay = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + xy + xy + y^2$$
$$= x^2 + 2xy + y^2.$$

وللتأكيد نكتب مرة أخرى:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2. \quad (5-1)$$

وقد رأينا هذا سابقًا في الفصل الثالث حيث أشرنا إلى أن $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ نتجت عن بعض الاعتبارات الهندسية البسيطة.

وهناك بعض القصص التي تعتمد على (5-1). جدير بالذكر أن ليونارد أويلر كتب هذه المعادلة ذات مرة على السبورة باعتبارها دليلًا على وجود الله، مدركًا أنه لا أحد غيره في الغرفة في ذلك الوقت يجرؤ على كشف جهله بمناقشته في ذلك. أصبح برتراند راسل عالم رياضيات من المرتبة الأولى، ولكنه أُجبر وهو طفل على إنشاد أن «مربع المجموع يساوي مجموع المربعات بإضافة ضعف حاصل ضربهم»، وقد اعترف أنه لم تَكُن لديه أيُّ فكرةٍ عن معنى ذلك، ولكنه كان يعرف فقط أنه إذا أخطأ فإن مُعلمه سوف يغضب منه غضبًا شديدًا.

إن الطريقة التي يحافظ بها الجذر التربيعي على عمليات الضرب والقسمة، وليس عمليات الجمع والطرح، واحدة من أهم مصادر الحزن لطلاب الجبر. ولدينا الآن فرصة لتوضيح هذا الأمر. لتكن a وb ترمزان إلى عددين موجبين ومن ثم لا يكون لدينا مشاكل مع أخذ الجذر التربيعي لأعداد سالبة فيما بعد. من الصحيح أن:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

لرؤية العبارة الأولى، علينا فقط أن نقوم بتربيع الطرفين: يكون مربع الطرف الأيسر هو ab، بينما يعطينا تربيع الطرف الأيمن ما يلي:

$$\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a}\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}\sqrt{b}\right) = ab.$$

هنا استخدمنا حقيقة أن حاصل ضرب الأعداد يمكن ترتيبه بأي شكل فيما يسمى: «قانون الإبدال للضرب» للحصول على النتيجة المطلوبة. وبالمثل يمكن أن يتأكد القارئ من أن مربع الطرفين فيما يخص حالة القسمة يعطي (تحصيل الحاصل) $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ وهو ما يحقق التأكيد الثاني. إلا أننا يجب أن نلاحظ أنه في الحالتين نستخدم حقيقة أنه إذا كان هناك عددان موجبان x وy لهما مربعات متساوية: $x^2 = y^2$، فإذن العددان أنفسهما متساويان. وهذا صحيح بالتأكيد، لكنه لا ينطبق على أي عددين عشوائيين على العموم؛ فمثلًا: $4 = (-2)^2 = 2^2$ ولكن $-2 \neq 2$. ولهذا السبب يجب توخي الحذر عند التعامل مع هذا النوع من الاستنتاج.

بعبارة أخرى، ما أوضحناه هو أن الجذر التربيعي لحاصل الضرب هو حاصل ضرب الجذور التربيعية، وأن الجذر التربيعي لخارج القسمة هو خارج قسمة الجذور التربيعية؛ وهو ما يعني أن عمليات الضرب واستخراج الجذور التربيعية يمكن تنفيذها بأي ترتيب لتعطي نفس النتيجة. وهذه الحقيقة تُستخدم دائمًا لتبسيط الجذور التربيعية للأعداد الكبيرة:

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

إلا أنه ليس صحيحًا على الإطلاق أن نتمكن من تبديل ترتيب الجمع وأخذ الجذر التربيعي، كما يتضح من المثال التالي:

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5; \quad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

في الواقع إذا كان a وb عددين موجبَين فإن الجذر التربيعي لمجموعهما يكون أقل دائمًا من مجموع جذرَيهما التربيعيين. وذلك لأن $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a + b$ في حين أن مربع مجموع جذرَيهما التربيعيين أكبر:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 &= (\sqrt{a})^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= a + b + 2\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

لدينا الآن ما يكفي من قواعد الجبر لاستخلاص الصيغة الشهيرة لحل المعادلات التربيعية، التي تتطلب منا تقنية عامة تسمى: «استكمال المربع». فلنبدأ بمثال. حل المعادلة:

$$x^2 + 6x - 16 = 0.$$

أضف 16 إلى الطرفين:

$$x^2 + 6x = 16.$$

نفكر الآن في $x^2 + 6x$ كما لو كانت $x^2 + 2xy$: من الواضح إذَن أن: $2xy = 6x$ و$y = \frac{6}{2} = 3$. فإذا كان الطرف الأيسر من المعادلة هو $x^2 + 2xy + y^2$ فإنه يمكننا إعادة كتابته على الصورة $(x + y)^2$، ثم أخذ الجذور التربيعية. لذلك فخطوتنا التالية هي أن نضيف $y^2 = 3^2 = 9$ لطرفَي المعادلة:

$$x^2 + 6x + 9 = 16 + 9 = 25.$$

الطرف الأيسر حاليًّا عبارة عن مربع تام $(x + 3)^2$ ويمكننا الآن حلُّ المعادلةِ بدون صعوبة، شريطة أن نتذكر أن العدد الموجب يكون له جذر تربيعي سالب كما يكون له جذر تربيعي موجب.

$$(x + 3)^2 = 25$$

$$\Longrightarrow x + 3 = \pm\sqrt{25} = \pm 5.$$

حيث ± 5 تعني $+5$ أو -5 والرمز $\Longrightarrow$ يعني «ومن ثم». أي إن:

$$x = 5 - 3 = 2 \quad \text{or} \quad x = -5 - 3 = -8\ .$$

من أجل استعمال الجبر بكفاءة نحتاج أن نتمكن من التعامل مع الأعداد الموجبة والسالبة على حدٍّ سواء. والسبب هو أنه حتى عند التعامل مع المسائل التي تحوي كميات موجبة، وحلولًا موجبة فقط، فإن العمليات الجبرية قد تُخرجنا من نطاق الأعداد الموجبة إلى نطاق الأعداد السالبة، على الرغم من أننا قد نعود في النهاية إلى نطاق الأعداد الموجبة. إذا كنا

نريد أن نُجريَ عمليات القسمة بحُرية فإننا نحتاج إلى الكسور، وإذا أردنا أن نُجري عمليات الطرح بحُرية فنحن نحتاج للأعداد السالبة كما نحتاج للأعداد الموجبة.

يبدو أننا لم نتردد كثيرًا في استخدام الكسور؛ وأفترض أن ذلك يرجع لأن فكرة تجزئة أي كائن مادي هي فكرة منطقية، على الأقل في بعض الأحيان. (فالأوصاف التي تنطوي على كسور لأشياء لا يمكن تجزئتها ربما تكون مَدعاةً للمزاح، كما في حالة قولنا 2.4 طفل.) كما ذكرنا في الفصل الثاني، قيَّد قدماء المصريين أنفسهم بالكسور التي تحتوي على 1 في البسط. وهذا العائق الذي وضعوه لأنفسهم يؤدي إلى بعض المسائل المهمة التي سنتناولها لاحقًا.

ومع ذلك، كان يوجد دائمًا انحياز للأعداد الموجبة. فالبابليون عرفوا كيفية حل المعادلات التربيعية ولكنهم لم يقبلوا سوى الحلول الموجبة. ولهذا السبب قد تبدو طريقتهم في تمثيل المعادلات التربيعية غريبة بالنسبة لنا. وكان النهج المفضل هو أن يطلب أبعاد المستطيل بمعلومية محيطه ومساحته. وهذا أدى إلى إتاحة الحلول الموجبة بشكل دائم.

هذا النوع من المسائل يكافئ معادلة تربيعية وحيدة. فلنفترض أن محيط المستطيل 28 وحدة ومساحته 48. ولنفترض أن x وy ترمزان لأبعاد المستطيل. فيكون لدينا:

$$2(x+y)=28, \quad xy=48.$$

المعادلة الثانية تتيح لنا كتابة $y=\frac{48}{x}$. بقسمة طرفَي المعادلة الأولى على 2 والتعويض بقيمة y نحصل على:

$$x+\frac{48}{x}=14.$$

بضرب جميع الحدود في x نجد أن:

$$x^2+48=14x \Rightarrow x^2-14x=-48. \qquad (5\text{–}2)$$

ويمكننا الآن تطبيق نفس الخطوات كما سبق وإكمال المربع، شريطة أن نعلم أنه بشكل عام:

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2.$$

فإذا ما قبلنا ذلك، يمكننا إضافة $\left(\frac{14}{2}\right)^2 = 7^2 = 49$ إلى طرفي المعادلة (2-5) فنحصل على:

$$x^2 - 14x + 49 = -48 + 49 = 1$$

$$\Longrightarrow x - 7^2 = 1.$$

ومن ثم فإن $(x - 7) = \pm 1$، إذن $x = 7 + 1 = 8$ أو $x = 7 - 1 = 6$. فإذا كانت $x = 8$، فإذن $y = \frac{48}{8} = 6$، أما إذا كانت $x = 6$، فإذن $y = \frac{48}{6} = 8$؛ ومن ثَم يوجد حل وحيد: وهو أن يكون المستطيل له الأبعاد 6×8.

وفيما يلي مثال آخر يكشف فيه الجبر عن حقيقة مهمة خاصة بالمقادير الموجبة. ولكن، مرة أخرى، سوف نسمح لأنفسنا بالتعامل مع الأعداد السالبة ونستخدم حقيقة أن حاصل ضرب عددين سالبين هو عدد موجب (وهي نقطة يتردد بعض الناس في قَبولها).

هناك عدة طرق لإيجاد متوسط الأعداد. متوسط العددين a وb هو:

$$\frac{a+b}{2}.$$

وهذا ما يسمى المتوسط الحسابي. ومن ناحية أخرى فإن المتوسط الهندسي لعددين موجبين هو العدد:

$$g = \sqrt{ab}.$$

المتوسط الهندسي له خاصية أن المربع الذي طول ضلعه g له نفس مساحة المستطيل الذي أبعاده a وb. إن المتوسط الهندسي مثل المتوسط العادي فيما يتعلق بأخذ اللوغاريتمات (على الرغم من أنه غير مهم فيما يأتي؛ لمزيد من الشرح للوغاريتمات، انظر الفصل الثاني). نتذكر أن $x^{\frac{1}{2}}$ تعني $\sqrt{x}$ ويمكن رؤية ذلك من خلال استخدام القانون الثالث ثم الأول للوغاريتمات.

$$\log g = \log\left(\sqrt{ab}\right) = \log\left((ab)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log\,(ab) = \frac{\log a + \log b}{2}.$$

إذا حسبت عددًا من هذه المتوسطات فسرعان ما ستلاحظ أن المتوسط الهندسي أصغر من المتوسط الحسابي. فمثلًا إذا كانت $a = 4$، و$b = 9$ فإن المتوسط الحسابي $6.5 = \frac{(4+9)}{2}$ في حين أن المتوسط الهندسي لهما هو $6 = \sqrt{36} = \sqrt{4 \times 9}$. ويمكنك تجربة غيرها بنفسك.

دعونا نثبت صحة ذلك باستخدام قليل من الجبر. فلنفترض أن a وb عددان موجبان، ونفكر في $(a-b)^2$. والآن ربما يكون $a - b$ عددًا سالبًا، لكن مربع أي عدد c لا يكون سالبًا. (بل إنه عدد موجب إلا إذا كان $c = 0$.) وباستخدام هذا ومفكوك $(a-b)^2$، نحصل على:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Longrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0.$$

قم بإضافة $4ab$ لطرفَيْ هذه المتباينة حتى يكون الطرَف الأيسر مربعًا كاملًا، كما هو موضَّح فيما يلي:

$$a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab.$$

ومن ثم:

$$(a+b)^2 \geq 4ab.$$

بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين فإن:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

بالقسمة على 2 نحصل على المتباينة:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

وهو المطلوب إثباته: أي إن المتوسط الحسابي أكبر من أو يساوي المتوسط الهندسي.

في الواقع يمكننا أن نقول أكثر من ذلك. إذا كان $a = b$ فإن المتوسط الحسابي يساوي المتوسط الهندسي يساوي a. إذا كان $a \neq b$ فإن $(a-b)^2 > 0$ والبرهان السابق يوضح أن المتوسط الحسابي أكبر فعلًا من المتوسط الهندسي.

وإذا كنا غير مُقيَّدين في تعاملنا مع الجبر، ونستخدم الأعداد السالبة بحرية، فإننا نستطيع حل أي معادلةٍ تربيعيةٍ بإكمال المربع في الحالة العامة. في المعادلة التربيعية العامة مثل:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

يؤدي إكمال المربع إلى الصيغة التربيعية الشهيرة:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ومع أن الطُّرق الجبرية المستخدمة للحصول على هذه النتيجة صعبة بعض الشيء بالمعايير المدرسية، إلا أنها لا يوجد بها شيء جديد. فالفكرة الجديدة في حل المعادلات التربيعية هي فقط إكمال المربع. وبمجرد استيعاب ذلك، تكون الصيغة العامة بسيطة ومباشرة. إلا أنها تتطلب من الطالب أن يستطيع الاستجابة جبريًّا بشكل سليم ليتمكن من التعامل مع هذا المستوى من العمل. على سبيل المثال، أثناء الاستنتاج يطلب منا في إحدى الخطوات وضع تعبير جبري مُعقَّد على مقام موحد. ما تفسير هذا؟

كل ما يحدث هو جمع الكسور. قد تكون التعبيرات معقدة، ولكن البسط والمقام لا يزالان يرمزان لأعداد (غير محددة) ومن ثم يتبعان نفس قوانين الجبر. ما القوانين ذات الصلة بذلك؟ للإجابة عن هذا السؤال، دعونا ننظر إلى جمع الكسرين:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}.$$

العدد bd هو حاصل ضرب b في d أي إن bd يمكن أن يكون مقامًا مشتركًا. نضرب المقام b بالمقام d ومن ثم نضرب البسط a بالعدد d أيضًا. ويكون التأثير النهائي هو الضرب في $\frac{d}{d} = 1$ وهذا لا يؤثر على قيمة الكسر. بالمثل نضرب $\frac{c}{d}$ في $\frac{b}{b}$ فنحصل على:

$$\frac{ad}{bd} + \frac{cd}{bd}.$$

والآن هذان الكسران لهما مقام مشترك فيمكن جمع البسطين معًا لنحصل على:

$$\frac{ad}{bd} + \frac{cd}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

هذه الخطوة الأخيرة تستخدم قانون التوزيع. لرؤية ذلك اسأل نفسك ماذا يقال عند كتابة شيءٍ مثل:

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}.$$

(في الحالة السابقة $z = bd$.) القسمة على z تعني الضرب في المعكوس $s = \frac{1}{z}$. ومن ثم هذا التعبير الأخير يصبح:

$$s\,(x+y) = sx + sy,$$

وهو مثال على قانون التوزيع في حالة الكسور.

يعد نظام أعداد العد الموجبة غير مناسب للجبر لأن هناك عمليتَين طبيعيتَين (الطرح والقسمة) تأخذاننا خارج النظام. القسمة تؤدي للكسور، وحساب الكسور صعب جدًّا لكن يمكن قبوله لأنه يمكن تمثيله بوضوح باستخدام أشياء مادية مثل شرائح الكعك، أمَّا الطرح فيؤدي للأعداد السالبة. وقد أخذت الأعداد السالبة وقتًا أطول بكثير لتحظى بالقَبول. حتى في عصر النهضة، كانت صحة استخدامها موضع شك لأنها تبدو مفتقرة إلى التفسير المادي. وتعد الأعداد السالبة أكثر قَبولًا في العالم الحديث كأعداد لها معنًى، ربما لأننا ألفنا مفهوم الديون، التي تفسر فكرة المال السالب. وبالطبع كانت الديون النقدية موجودةً منذ آلاف السنين، ومن ثَم فهذه ليست القصة كاملة. ومع ذلك فمن المؤكد أن الناس يشعرون أن الديون حقيقية؛ ومن ثم فإن حساب الديون، الذي يجب أن يسمح على الأقل بإضافة مبالغ سالبة، شيء مقبول. تتزايد الديون عندما تخضع لحساب الفائدة. وهذا ينطوي على ضرب هذه القيم السالبة بعوامل موجبة للحصول على دين أكبر. إذا كان رصيدك مدينًا بـ 100 جنيه إسترليني بفائدة جزائية 30%، فإن رصيدك سوف يصبح $-130 = (1.3 \times -100)$ جنيهًا إسترلينيًّا بعد عام واحد.

على الرغم من ذلك، فإن النقطة التي يَصعُب تَقبُّلها نفسيًّا هي الاعتراف بأن حاصل ضرب عددين سالبين هو عدد موجب. وهذا بالضبط ما تحتاج إليه حتى تكون معلوماتك الجبرية سليمة. وفيما يلي مثال بسيط لتوضيح ضرورة هذه القاعدة: $1 = 1 \times 1 = (2-1)\,(2-1)\,(1-2)$. ومن ناحية أخرى، يمكن معاملة الطرح كما لو كان

جمعًا للمعكوس، فيكون لدينا:

$$1 = (2-1)\,(2-1) = (2+(^{-}1))\,(2+(^{-}1))\,.$$

وباستخدام قانون التوزيع يمكننا فك الأقواس بضرب كل حد من القوس الأول في كل حد من القوس الثاني، ثم جمعها كلها فنحصل على أربعة حدود. ويستمر الحساب:

$$\begin{aligned} 2\,(2+(^{-}1)) + \ (^{-}1)\,(2+(^{-}1)) & \\ &= (2\times 2) + (2\times\ (^{-}1)) + ((^{-}1)\times 2) + ((^{-}1)\times\ (^{-}1)) \\ &= 4 + (^{-}2) + (^{-}2) + ((^{-}1)\times\ (^{-}1)) \\ &= 0 + ((^{-}1)\times\ (^{-}1)) \\ &= (^{-}1)\times(^{-}1)\,. \end{aligned}$$

ومن ثم نحصل على:

$$(^{-}1)\times\ (^{-}1) = 1 :$$

وكل ما عدا ذلك سيؤدي إلى إجابة خاطئة. ومع ذلك فعندما يقول أي مدرس إن حاصل ضرب عددين سالبين هو عدد موجب، فإنه عرضة لتلقي بعض الملاحظات على غرار «لا يمكنك ضرب كميتين سالبتين من المال للحصول على كمية موجبة!». وعلى الرغم من أن هذا قد يبدو اعتراضًا مقنعًا، فإنه هراء؛ إذ لا معنًى لضرب كميةٍ من المال في كميةٍ أخرى من المال في المقام الأول، سواء اعتبرت الكميات ائتمانات أو ديونًا. ما تقوله الرياضيات هو أنه عندما يتم ضرب عددَين سالبَين، فإن النتيجة ستكون موجبة.

إذن، فالقاعدتان يجب أن تكونا كما يلي: حاصل ضرب أي عددين من نفس الإشارة دائمًا ما يكون عددًا موجبًا، في حين أن حاصل ضرب أي عددَين مختلفَي الإشارة يكون عددًا سالبًا. ويمكننا الآن فك أي حاصل ضرب من الأقواس مستخدمين قانون التوزيع وهاتين القاعدتين. ولكي نفك قوسًا يحتوي على الطرح، يمكننا معاملة الإشارة السالبة وكأنَّها تعني جَمْع المعكوس: كل ما تحتاج لإدراكه هو أن $(^{-}a)\,b = a\,(^{-}b) = {}^{-}\,(ab)$،

حيث كلٌّ منها معكوسٌ لحاصل الضرب ab:

$$a(b-c) = a(b+(-c)) = ab + a(-c) = ab - ac.$$

فمثلًا:

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x(x-y) - y(x-y)$$
$$= x^2 - xy - yx - y(-y).$$

والآن طرح $y(-y) = -y^2$ يعني إضافة المعكوس y^2؛ ومن ثم نحصل على:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

بطريقة مماثلة نستنتج التعبير الخاص بالفرق بين مربعين:

$$(x+y)(x-y) = x(x-y) + y(x-y)$$
$$= x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2.$$

مرة أخرى، فإن عكس هذا الاتجاه هو الأكثر استخدامًا. ويمكن كتابة الفرق بين مربعين كحاصل ضرب. مثل:

$$n^2 - 1 = n^2 - 1^2 = (n+1)(n-1),$$

الذي قد تتذكر أنه ظهر في المسألة الرابعة في الفصل الأول.

القوتان الأعلى التاليتان للمقدار $(x+y)$ نحصل عليهما من التعبيرين:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

ليس من الصعب وصف المفكوك في الحالة العامة $(x+y)^n$. قد يبدو مزعجًا عند النظرة الأولى، نظرًا لوجود عدد كبير من الحدود عند فك كل الأقواس، مما يجعله صعب التتبع.

إلا أننا نسأل كيف يبدو الحد العام؟ يكون بالصيغة $x^r y^s$ حيث $r + s = n$. والسبب في ذلك هو أن أي حد يحتوي أحد الرمزين x أو y من كلٍّ من n من الأقواس ومن ثم العدد الكلي لكلٍّ من x وy في كل حدٍّ يجب أن يساوي n. فمثلًا في مفكوك $(x + y)^4$، أحد الحدود الناتجة من اختيار x من القوس الأول والثالث والرابع واختيار y من القوس الثاني، يسهم بـ $xyxx = x^3y$ في المفكوك الكلي. يأتي الآن حساب عدد التكررات لكل واحد من الحدود الناشئة.

متتابعة المعاملات في المثالين السابقين هي على الترتيب $(1, 3, 3, 1)$ و$(1, 4, 6, 4, 1)$. فإذا رجعت إلى صورة مثلث باسكال في الفصل السابق، فسوف تجد أن هذه تمثل الصف الثالث والرابع من تلك المصفوفة. ولهذا السبب يطلق على الأعداد في المثلث «معاملات ذات حدين»، لأن الصف الذي ترتيبه n يسمح لك بكتابة مفكوك القوة n لتعبير ذي حدين $x + y$. والسبب في نجاح ذلك، يتضح ببساطة بمجرد أن نتذكر أن $\mathrm{C}(n, r)$ يقوم بحساب عدد طرق اختيار r من الأشياء من n من الأشياء المتاحة. للحصول على حد من النوع $x^r y^{n-r}$ في مفكوك ذي حدَّين يجب اختيار الرمز x من r من n من الأقواس المتاحة والرمز y من باقي الأقواس وعددها $n - r$. العدد الإجمالي من طرق اختيار r من الأقواس من عدد n يعني $\mathrm{C}(n, r)$ ومن ثم فإن معامل $x^r y^{n-r}$ في المفكوك ذي الحدين $(x + y)^n$ هو العدد ذو الحدَّين $\mathrm{C}(n, r)$. وهذه الحقيقة تسمى نظرية ذي الحدين.

(٢) عودة إلى الكسور المصرية

لعلك تتذكر من الفصل الثاني ما قيل عن أنه يمكن التعبير دائمًا عن الكسر الحقيقي $\frac{m}{n}$ كمجموع كسور مختلفة المقام تشترك جميعها في البسط 1. فمثلًا:

$$\frac{6}{13} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{312}.$$

كانت الطريقة المقترحة هي طرح أكبر معكوس متاح عند كل خطوة، وكان يزعم أن العملية سوف تنتهي بعد m من الخطوات. لنرَ لماذا يحدث هذا.

أولًا: ما أكبر معكوس أقل من الكسر الحقيقي $\frac{m}{n}$؟ فقط الحالة عندما تكون m على الأقل تساوي 2 تحتاج للاهتمام، ولنفترض أننا بسطنا الكسر إلى أقل حدود ممكنة، إلى أن يصبح m وn ليس بينهما أي عامل مشترك بخلاف 1. والآن بما أن $m < n$ نستطيع

تقسيم m إلى n. فلنفترض أن m تنقسم إلى n عدد k من المرات وكان الباقي r، أي إن:

$$n = km + r, \quad 1 \le r \le m - 1, \quad 1 \le k.$$

قيمة k على الأقل 1 لأن $m < n$. والباقي r على الأقل 1 لأن n ليس من مضاعفات m نظرًا لأن العددين لهما عامل مشترك أعظم هو 1. ومن ثم أكبر معكوس أقل من $\frac{m}{n}$ هو $\frac{1}{(k+1)}$ لأن:

$$km < n = km + r < km + m = m(k + 1).$$

بأخذ المعكوس (وهو يؤدي إلى أن تغير المتباينتان اتجاههما):

$$\frac{1}{km} > \frac{1}{n} > \frac{1}{m(k + 1)},$$

بالضرب في m لجميع الأطراف وكتابة أصغر عدد أولًا:

$$\frac{1}{k + 1} < \frac{m}{n} < \frac{1}{k}.$$

أي إن $\frac{1}{(k+1)}$ هو أكبر كسر وحدة 1 أصغر من $\frac{m}{n}$، لأن ثاني أكبر كسر، $\frac{1}{k}$، أكبر بكثير.

نعلم الآن كيف نُجري هذه الحسابات. في المثال السابق حيث $m = 6$ و$n = 13$، نبدأ بـ $13 = 2 \times 6 + 1$ ومن ثم تكون أول قيمة لـ k هي 2. ومن ثم نطرح $\frac{1}{3} = \frac{1}{(2+1)}$ فنحصل على:

$$\frac{6}{13} - \frac{1}{3} = \frac{6 \times 3 - 1 \times 13}{39} = \frac{5}{39}.$$

ثم $39 = 7 \times 5 + 4$ وتكون القيمة التالية لـ k هي 7، ونحصل على $\frac{1}{8}$ باعتباره المعكوس الثاني الذي نطرحه:

$$\frac{5}{39} - \frac{1}{8} = \frac{5 \times 8 - 1 \times 39}{312} = \frac{1}{312}.$$

ومن ثَم:

$$\frac{6}{13} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{312}.$$

نحتاج إلى بعض المفاهيم الجبرية لإثبات أن العملية تنتهي دائمًا بعد m من الخطوات أو أقل. فدعونا ننظر بعناية لما يحدث في عملية الطرح الأولى:

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{k+1} = \frac{m(k+1)-n}{n(k+1)}.$$

مع الوضع في الاعتبار أن $n = mk + r$ فنحصل على:

$$\frac{m(k+1)-(mk+r)}{n(k+1)} = \frac{mk+m-mk-r}{n(k+1)} = \frac{m-r}{n(k+1)}.$$

الملاحظة الرئيسية تكمن فيما حدث للبسط؛ إذ نقص من m إلى القيمة $m - r$. ونظرًا لأن r عدد موجب، فمن المتوقع أن البسط في كل كسر آتٍ أقل من سابقه. أي إن بعد $m - 1$ من الخطوات أو أقل فالعملية سوف تنتج باقيًا هو نفسه كسر وحدة وبذلك تنتهي العملية. (هذا مثال يوضح برهانًا استنتاجيًّا كما فعلنا في مسألة تقسيم الفودكا في الفصل الأول: المبدأ هو تقليل الحالة العامة إلى حالة سابقة؛ وفي هذا المثال نبين كيف ننتقل من قيمة عامة m إلى القيمة الأقل $m - r$.)

بقي أن نلاحظ أن المعكوس التالي الذي سيطرح سيكون دائمًا أصغر من سابقه (حيث إن هذا سوف يضمن أن جميع كسور الوحدة ستكون مختلفة). بالطريقة التي جرى بها الاختيار نرى أن المعكوس التالي لا يمكن أن يكون أكبر من سابقه ولا يمكن أن يساويه، حيث $\frac{2}{(k+1)}$ أكبر من $\frac{m}{n}$ لأن:

$$\frac{m}{n} < \frac{1}{k} < \frac{2}{k+1}.$$

وهذه المتباينة الكسرية الأخيرة من السهل إثباتها لأن قاعدة الضرب التبادلي (ضرب الوسطين في الطرفين) التي ذكرناها في الفصل الثاني تقول إنها تساوي:

$$k + 1 < 2k \iff 1 < k,$$

وكما لاحظنا بالفعل، هذا صحيح لأن الكسر $\frac{m}{n}$ كسر حقيقي.

الفصل السادس

المزيد من الأسئلة والإجابات

في معظم بلدان العالم الغربي تُتاح للمواطنين فرصةُ المشاركة في يانصيب تديره الدولة. وقد انضمَّت بريطانيا حديثًا لهذه اللُّعبة، ولم يوحد الدولة منذ عام ١٩٩٤ شيء مثلما فعَل اليانصيب الوطني، وعلى ذلك فكتاب مثل كتابنا هذا حريص على الإجابة عن السؤال التالي:

(١) ما احتمالات فوزك في اليانصيب؟

تتشابه أشكال اليانصيب تقريبًا في جميع أنحاء العالم. وفي بريطانيا تنطوي اللعبة الأساسية على اختيار مجموعة من 6 كرات مُرقَّمة (بأي ترتيب)، وتفوز إذا كان اختيارك يتفق مع اختيار الآلة العشوائي للست كرات من مجموعة الكرات المرقمة من 1 إلى 49.

عدد الطرق المحتمل أن تظهر بها الكرات الست، مع أخذ الترتيب في الاعتبار، هو $49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44$. إذ لا يمكن اختيار نفس الكرة مرتين، ومن ثَم تنقص الاحتمالات واحدًا في الكرة التالية في كل مرة. لقد اخترت مجموعة معينة من ست كرات، وستشمل $6{\times}5{\times}4{\times}3{\times}2{\times}1$ من هذه الترتيبات الممكنة. ومن ثم فإن فرصتك في الفوز هي:

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44} = \frac{1}{49 \times 47 \times 46 \times 44 \times 3} = \frac{1}{13,983,816}.$$

ففرصتك في الفوز هي واحد من 14 مليونًا. ويعتمد اليانصيب على عدم تقديرنا لضخامة هذا الرقم. فلو وضعنا 14 مليون قلم في صفٍّ واحد، لامتدَّ هذا الصف من إنجلترا إلى منغوليا، فهل تتوقع أن يقع الاختيار العشوائي على القلم الخاص بك من بين هذه الأقلام؟

النصيحة الوحيدة التي يستطيع عالم الرياضيات أن يقدمها لك إذا قررت أن تشارك في هذه اللعبة هي ما يلي. أولًا: اختر الأرقام الكبيرة لأن الأرقام الصغيرة، ولا سيما الأقل من 32، أرقام شائعة؛ فالناس عادة تختار تاريخ ميلاد أصدقائهم أو أقاربهم. وباختيارك الأرقام الكبيرة، فإذا حصلت على جائزة كبيرة، فمن المحتمل أن تكون ضخمة جدًّا لأنك اخترت الأرقام التي اختارها عدد قليل من الناس. ثانيًا، ولراحة البال، من المهم ألَّا تختار نفس الأرقام في كل مرة؛ فإذا فعلت فإنك ستكون مجبرًا على اللعب كل أسبوع وتقضي باقي حياتك في رعبٍ خشية أن تفوز أرقام «الحظ» الخاصة بك في الأسبوع الوحيد الذي نسيت أن تشارك فيه! بالتأكيد لا تختر الأرقام $1, 2, 3, 4, 5, 6$ فالآلاف من الناس يفعلون ذلك كل أسبوع؛ فإذا حدث وفاز هذا الاختيار يومًا فإن حصتهم من الجائزة المشتركة ستكون ضئيلة. وبطبيعة الحال، لا تزال هذه الجائزة أكثر من لا شيء. إلا أن ما أقصده هو أنك لن تستطيع أبدًا الفوز بجائزة كبيرة بهذه الأرقام أو ما يشبهها لأنها أرقام شائعة جدًّا.

توجد طريقة أخرى، أكثر ديناميكية، لحل هذه المسألة، وهي تتفق مع توتر الموقف في الواقع. سيظل احتمال اختيارك للأرقام الستة «قائمًا» بعد سحب الكرة الأولى ويبلغ $\frac{6}{49}$ لأنك بدأت بستة من الـ 49 رقمًا المتاحة. ومن هذه الأسابيع التي يحالفك فيها الحظ، ستكون احتمالات أن يظل اختيارك «قائمًا» بعد الكرة الثانية $\frac{5}{48}$؛ لأن الآلة لديها 48 كرة مرقمة باقية، وأنت لديك خمسة من الأرقام؛ إذ تم استخدام الرقم السادس بالفعل في الكرة الأولى. ومن ثم فإن نسبة الأسابيع التي تكون ما زلت مشاركًا فيها ولديك احتمال للفوز بعد سحب كرتين هي $\frac{5}{48}$ من $\frac{6}{49}$، أي حاصل الضرب

$$\frac{6}{49} \times \frac{5}{48}.$$

عند الاستمرار بهذه الطريقة، نرى أن احتمال أن يظل اختيارك «قائمًا» بعد سحب الكرات الستة كاملة، كما في السابق، هو:

$$\frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{46} \times \frac{2}{45} \times \frac{1}{44}.$$

السؤال التالي عبارة عن مسألة احتمالات عملية من نوع مختلف تمامًا. لقد فهمت أن هذا السؤال وُضِعَ لطلاب الطب في أمريكا، وكانت الإجابة تُنذر بالخطر بشكل ما.

لدينا اختبار لمرض معين يعطي بلا شك نتيجة إيجابية إذا كان الشخص مصابًا بهذا المرض، ولكن هناك احتمال 5% أن تكون نتيجة الاختبار إيجابيَّة إذا كان الشخص غير مريض. ومن المعروف أن واحدًا في الألف من السكان مصاب بهذا المرض. وفيما يلي السؤال.

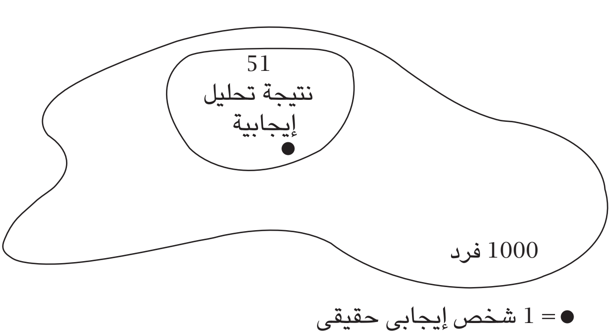
(٢) شخص اختير عشوائيًّا من مجموعة السكان وكانت نتيجة اختباره إيجابية، فما احتمال أن يكون هذا الشخص مصابًا بالمرض؟

يبدو أن العديد من الطلاب كانت إجابتهم 0.95، وكان تبريرهم البسيط هو أن الاختبار دقيق بنسبة 95%. في الواقع هذا غير صحيح بالمرة. فإجابتهم لم تضع في الحسبان انتشار المرض في السكان وهذا الانتشار سيؤثر بوضوح في الإجابة. فمثلًا إذا كان المرض هو الجدري — الذي تم التخلص منه تمامًا — فإن الإجابة ستكون 0؛ إذ لا يوجد احتمال لمريض بالجدري حتى إذا كانت نتيجة الاختبار إيجابية. ولهذا فإننا نرى أنه إذا كان المرض نادرًا جدًّا فإن فرصة أن تكون نتيجة الاختبار الإيجابية زائفة ستكون مرتفعة جدًّا؛ فكلما ندَر المرضُ زاد احتمال أن تكون النتيجة الإيجابية زائفة. إذن ما إجابة سؤالنا؟

احتمال أن شخصًا ما مصاب بهذا المرض هو واحد في الألف؛ أي 0.001. ولكننا هنا نعرف المزيد؛ حيث إن هذا الشخص اختير عشوائيًّا من نوعٍ خاص: وهو النوع ذو النتيجة الإيجابية في الاختبار، ولنسمِّ هؤلاء «الأفراد الإيجابيين». ويصبح السؤال: ما نسبة المرضى بين الأفراد الإيجابيين؟

لنأخذ قطاعًا عاديًّا من السكان يتكون من 1000 فرد (شكل ٦-١). في المتوسط سيكون هناك شخص واحد مصاب بالمرض، و5% من الباقين؛ أي 50 شخصًا إذا قربنا العدد لأقرب عدد صحيح، ستكون نتيجة اختبارهم إيجابية زائفة. ما لدينا إذَن هو فرد اختير عشوائيًّا من الأفراد الإيجابيين، ويمكننا الآن أن نرى أنه يوجد احتمال 1 من 51 أن الشخص يعاني من المرض. ويترتب على ذلك أن الإجابة الصحيحة ستكون أقل قليلًا من 2%؛ وليست 95%!

مسائل الاحتمالات عادة تكون خادعة بعض الشيء، لا سيما المسائل التي تحتوي على احتمالات مشروطة حيث تُسأل عن احتمال وقوع حدث مرتبط بوقوع حدث آخر. (في هذا المثال تريد معرفة احتمال أن يكون الشخص مريضًا في ظل أن نتيجة اختباره إيجابية.)



شكل ٦-١

مثل هذه المسائل يمكن أن تكون خادعة للغاية؛ فألَّا تتمكن من حل مسألة شيءٌ، وأن تتصوَّر أنك تستطيع حلها وتقاد إلى نتيجة خاطئة تمامًا شيءٌ آخر. وهذا المثال يوضح كيف يمكن بسهولة خداع حتى الأذكياء والمتعلمين. ومن المفيد والمهم أن يكون هناك من يفهم الرياضيات بحق.

مسألة الاحتمالات المشروطة التالية قديمة، ولكنها بطريقة ما تستطيع معاودة الظهور من آنٍ لآخر بأشكال مختلفة. أحيانًا تُعرَف باسم «مسألة مونتي هول» وفيما يلي النسخة الشائعة المتداولة منها.

متسابق في برنامج ألعاب تليفزيوني يعرض أمامه ثلاثة أبواب مرقمة. يوجد خلف أحدها الجائزة الكبرى وخلف كلٍّ من البابَين الآخرَين يوجد ماعز. (لا تسألني لماذا الماعز.) اللاعب يختار أحد الأبواب. فيفتح مقدم البرنامج التليفزيوني، الذي يعلم ماذا وراء كل باب، بابًا آخر فيجد المتسابق ماعزًا. عندئذٍ يكون للمتسابق حق الاختيار إما أن يظل عند اختياره الأول أو يختار الباب الآخر الذي لم يُفتح بعد. والسؤال هو:

(٣) هل ينبغي أن يظل المتسابق مصرًّا على اختياره أم يغيره في مسألة مونتي هول؟

الجواب: نعم، يجب أن يغير؛ لأن التغيير يضاعف له فرص الفوز! ومعظم الناس — إن لم يكن جميعهم — يجدون أن هذا يعارض توقعاتهم. فلماذا يكون الباب الباقي الذي

لم يُفتح بعد أكثر ترجيحًا لوجود الجائزة خلفه مقارنة بالباب الذي اختاره المتسابق في المقام الأول؟ سنوضح هنا لماذا يكون التغيير هو الاستراتيجية الأفضل.

يختار المتسابق مبدئيًّا الباب رقم 1 مثلًا. واحتمال أن يكون هذا الاختيار صحيحًا يساوي $\frac{1}{3}$. ويستطيع مونتي هول دائمًا أن يريك ماعزًا وراء أحد البابَين الآخرَين؛ ومن ثَم فإن احتمال أن يكون الباب رقم 1 هو الاختيار الصحيح لا يزال يساوي $\frac{1}{3}$ بعد أن يفعل هذا. وبما أن الجائزة ليست خلف الباب الذي فتحه مونتي، فإن احتمال أن تكون خلف الباب الثالث يصبح $\frac{2}{3}$.

آلية هذا العمل تصبح أكثر وضوحًا إذا زدنا عدد الأبواب من 3 إلى 100. وبما أن هذه تجربة فكرية، يمكننا أن نزيد العدد إلى 14 مليونًا. وتوجد جائزة واحدة، والباقي مَعْز. إذا اخترت الباب رقم 1، فمن المؤكد تقريبًا أنك مخطئ لأن فرصتك ستكون 1 من $14,000,000$ على وجه الدقة. والآن يريك مونتي ماعزًا خلف كل بابٍ من الأبواب ما عدا الباب رقم 1 وبابًا آخر. فإذا أنت لم تكسب اليانصيب بدايةً (وهذا مؤكد عمليًّا) وكان هناك ماعز خلف الباب رقم 1 أيضًا، فإنه لن يستطيع أن يفعل ذلك إلا إذا أراك كل المَعْز الأخرى، وفي هذه الحالة ستكون الجائزة وراء الباب المتبقي بالتأكيد. والواضح أن عليك تغيير اختيارك، لأن التغيير لن يكون خاطئًا إلا في الحدث غير المحتمل أنك اخترت اختيارًا صحيحًا في البداية.

والبرهان لا يختلف في حالة الأبواب الثلاثة، كل ما هنالك هو أن الاحتمالات أقل تطرفًا. إذا كنت غير مقتنع حتى الآن، حاول تجربة هذه الطريقة مع صديق مثلًا باستخدام عشر علب كبريت أو ما يشبه ذلك. ولن تحتاج لتَكرار التجربة كثيرًا لكي تقتنع بالبرهان السابق، نظرًا لقوته. على أية حال يوجد القليل الذي يمكن أن يضاف لأن التفسير الذي قدمتُه يفترض ضمنيًّا أن مونتي، إذا كان لديه اختيار بين اثنين من المَعْز ليريهما لك (في حالة أن الباب رقم 1 هو الباب الفائز)، فهو يختار عشوائيًّا؛ وإذا استخدم طريقة أخرى، وعَلِم المتسابق بذلك فقد يمكنه استخدام استراتيجية أفضل. على سبيل المثال، إذا علمنا أن مونتي شخص كسول ويختار دائمًا الباب ذا الرقم الأعلى في الأبواب الثلاثة، ولا يختار الباب ذا الرقم الأقل إلا إذا اضطُر لذلك حتى لا يفتح الباب الذي وراءه الجائزة، فهذه بالفعل ستكون معلومة قيمة جدًّا؛ ففي حالة أن المتسابق اختار الباب رقم 1 وأن مونتي أراه الماعز خلف الباب رقم 2، فإن اللاعب سوف يكون على يقين من أن الجائزة خلف الباب رقم 3 وسوف يحصل عليها.

ثمة نسخة مماثلة من هذه المشكلة وهي تخصُّ ثلاثة سجناء: سميث وجونز وأنت. حُكم عليكم جميعًا بالإعدام وسيُنفَّذ الحكم في الصباح. وقرر الحاكم عشوائيًّا أن يؤجل الإعدام لواحد منكم، وقد اتخذ قراره فيمن يقع عليه الاختيار. وفي الواقع تم إخبار الحارس بمن سيعيش ومن سيموت، ولكن الحاكم رغب في أن يحتفظ بالأنباء السارَّة لتكون مفاجأة، ومنع الحارس من كشف الحقيقة.

أنت وضعت خُطة ماهرة لتحسين فرصك في النجاة. فاقتربت من الحارس لتقول له إنك تعرف أنه لا يستطيع الإفصاح عن الشخص المختار، ولكن على الأقل واحد من زميلَيك في الزنزانتين المجاورتين سينفذ فيه حكم الإعدام، ومن ثَم لن يضيره أن يكشف اسم واحد، بخلافك أنت، لم ينل العفو. الحارس تأخذه الشفقة ويوافق ويقول كلمة واحدة: «جونز». أنت الآن تُطَمْئِن نفسَك بالمنطق الزائف التالي:

> «إذن فجونز المسكين ستقطع رأسه. حسنًا ذلك يعني أن لدي احتمال 50–50 لأن الآخر الذي سينفذ فيه الحكم قد يكون سميث أو أنا.»

بطريقة ما يبدو أنك قد رفعت احتمالات نجاتك من 1 من 3 إلى 1 من 2 ومن ثم تستطيع أن تنام مطمئنًّا أكثر.

بالطبع أنت لم ترفع فرصتك في النجاة على الإطلاق. (إذا كانت هذه الاستراتيجية صالحة فماذا يحدث إذا استخدمها كلٌّ منكم أنتم الثلاثة!) الحارس ببساطة أراك الماعز خلف أحد البابَين الآخرَين، وما زال يوجد احتمال واحد من ثلاثة أن يكون خلف بابك في الصباح جائزة العفو. أما بالنسبة لجونز وسميث اللذين صادف أن استمعا لحديثك مع الحارس، فالموضوع مختلف تمامًا. جونز البائس سيُنفَّذ فيه الحُكم في الصباح بلا شك. أما سميث فله الحق في أن يشعر بالارتياح إلى حدٍّ ما. ونظرًا لأن فرصتك في النجاة لا تزال $\frac{1}{3}$، فقد زادت فرصته إلى الاحتمال التكميلي الذي يساوي $\frac{2}{3}$. فخطتك الصغيرة لم تُفِدك أنت، وإنما أفادت سميث بعض الشيء. ومع ذلك فإن كلًّا منكما أنت وسميث لا بدَّ أن ينتظر حتى الفجر عندما تُفتح كل الأبواب لمعرفة مصيركما الحقيقي.

ثمة نسخة أخرى أقل درامية من المسألة نفسها كانت شائعة الاستخدام لدى مؤلفي كتب الألغاز وممتحني الرياضيات لسنوات. لديك كرة حمراء وكرتان صفراوان، إحداهما تحمل الرقم 1 والثانية 2، ووضعت جميعها في قبعة. أخذ صديقك كرتين من القبعة عشوائيًّا في نفس الوقت. ما احتمال أن تكون الكرتان صفراوَين؟

لأنك تختار كرتين من أصل ثلاث كرات وكلها متساوية في احتمالات الاختيار، فإن احتمال أن تكون إحداهما حمراء يساوي $\frac{2}{3}$، ومن ثَم فإن احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأصفر (أي عدم اختيار الكرة الحمراء) يساوي $\frac{1}{3}$.

والآن لنفترض أنك رأيت لونًا أصفر من بين أصابع صديقك عندما سحب الكرتين. بالحصول على هذه المعلومة الإضافية، ماذا يكون الآن احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأصفر؟

الإجابة لا تزال $\frac{1}{3}$ طبعًا، لأنك لم تحصل على معلومة إضافية على الإطلاق؛ فأنت تعرف أصلًا أن واحدة على الأقل من الكرات لا بدَّ أن تكون صفراء؛ ومن ثم فإن نظرتك التي اختلستها لم تُضِف إلى معلوماتك شيئًا.

أخيرًا، لنفترض أنه صادف أن رأيت ليس فقط اللون الأصفر بل رأيت أيضًا الرقم 1 على الكرة الصفراء التي كانت بين أصابع صديقك. فما احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأصفر الآن؟

هذه المعلومة تغيِّر الوضع حقًّا! فأنت تعلم أن واحدةً من الكرات هي الكرة الصفراء رقم 1 والأخرى قد تكون الصفراء رقم 2 أو الكرة الحمراء. ومن ثم فإن احتمال أنه سحب كرتين صفراوين قد زاد من $\frac{1}{3}$ إلى $\frac{1}{2}$.

لماذا يهم أن تعرف أن الكرة الصفراء التي رأيتها رقمها 1 أو 2؟ الإجابة أنه لا يهم الرقم الذي رأيته، ما يهم هو «معرفة» هذا الرقم.

وبالرجوع إلى موضوع الإعدام الذي أثير في السؤال السابق، دعونا ننظر إلى الموضوع الآتي.

(٤) ما احتمال فوز اللاعب الأول في لعبة الروليت الروسية؟

إذا كنت لا تعرف هذه اللعبة القاتلة، فاسمح لي بشرح قواعدها لك. يتناوب لاعبان في تفريغ خِزانة مسدس من ست طلقات بحيث يصوب كلٌّ منهما المسدس إلى رأسه. وتوجد طلقةٌ واحدةٌ في أحد الأماكن الستة في الخزانة المستديرة للمسدس، وكل واحد من اللاعبين يأخذ دوره في إطلاق المسدس، وقبل الإطلاق يدير اللاعب الخزانة حتى لا يعرف مكان الطلقة داخل الخزانة، ويستمر اللعب حتى ينجح أحدهما في قتل نفسه، وهنا يعلن اللاعب الثاني أن اللاعب الأول هو الفائز.

هذه لعبة «غير عادلة» لأن اللاعب الذي يبدأ له «ميزة» طفيفة، لكن السؤال هو: ما احتمال أن يقتل اللاعب الأول نفسه (يفوز) بالضبط؟ سوف نرى في الفصل القادم أنه توجد طريقة طبيعية لحل هذه المسألة باستخدام المتسلسلة الهندسية. ومع ذلك، فمن الممكن الحصول على الإجابة حالًا باستغلال تماثل المواقف.

ليكن اللاعب الأول A، والثاني B، وليكن a، b يرمزان لاحتمالات فوزهما على الترتيب. بالطبع، بما أن المسدس سوف يُطلق عاجلًا أو آجلًا فيكون لدينا $a + b = 1$، أي من المؤكد أن أحد اللاعبَين سوف يفوز. والآن الطلقة الأولى في المسابقة ستكون قاتلة أو لا. فإذا كانت قاتلة فستكون فرصة اللاعب B في الفوز صفرًا. على أية حال يوجد احتمال $\frac{5}{6}$ أن تكون غير قاتلة، في هذه الحالة يتبادل اللاعبان A وB الأدوار، ويكون B هو اللاعب صاحب الميزة. بعبارة أخرى، في حالة أن الطلقة الأولى فارغة، فإن احتمال أن يكون B هو الفائز هو a، وهو الاحتمال الأصلي لفوز A. هذا يعطي معادلة سهلة للعلاقة بين b وa وهي:

$$b = \frac{5}{6}a,$$

بتعويض ذلك في العلاقة $b = 1 - a$ نحصل على:

$$1 - a = \frac{5}{6}a \Rightarrow 1 = \frac{11}{6}a \Rightarrow a = \frac{6}{11}.$$

أي إن فرصة اللاعب الأول في الفوز هي 54.5%.

لننظر الآن إلى مسألة تجمع بين الاحتمال والهندسة.

(٥) إذا تدحرجت عملة معدنية على رقعة شِطْرنج، فما احتمال أن تستقر بحيث تغطي ركنًا من مربع؟

المقصود بهذا السؤال هو: إذا كررنا هذه التجربة مرات عديدة، فما النسبة على المدى الطويل، كعدد بين 0 و1، لوقوع حدث تغطية العملة المعدنية لركن من أحد مربعات الشِّطْرنج؟ تعتمد الإجابة، بطبيعة الحال على حجم العملة. وسوف نفترض هنا ما يكون طبيعيًّا في الواقع، وهو أن قطر العملة لا يزيد على طول ضلع المربعات على رقعة الشطرنج. وسوف نرى لاحقًا ما الذي يحدث في حالة كون طول القطر مختلفًا.

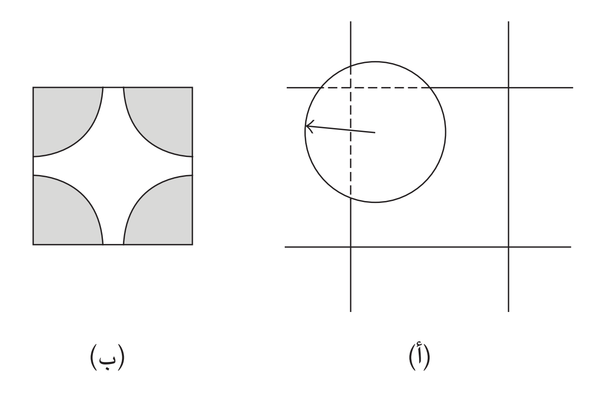
مرة أخرى لحل هذه المسألة علينا رؤيتها من زاوية مختلفة. الملاحظة الرئيسية هنا هي أن العملة سوف تغطِّي ركنًا إذا — وفقط إذا — كانت المسافة من مركز العملة لأحد الأركان لا تزيد عن نصف قطر العملة: انظر شكل ٦-٢(أ). يقع مركز العملة داخل أحد المربعات، واحتمالات أن يقع في أي مكانٍ على رقعة الشطرنج متساوية. ويبين شكل ٦-٢(ب) مناطق مظللة وهي المناطق القريبة من الركن والتي إن وقع مركز العملة بداخلها، لغطت العملة هذا الركن. إذن فاحتمال أن تغطي العملة الركن هي بالضبط النسبة بين المساحة المظللة إلى المساحة الكلية للمربع. وتكوِّن المناطق المظللة معًا دائرة تكافئ مساحتها مساحة دائرة العملة نفسها ومن ثَم يمكننا صياغة الإجابة على النحو التالي: احتمال أن تغطي العملة ركنًا ما يساوي:

$$\frac{\text{(مساحة العملة)}}{\text{(مساحة كل مربع)}}.$$

ولنضرب مثالًا محددًا، لنفترض أن قطر العملة يساوي طول ضلع المربع. ليكن هذا الطول 2 وحدة ومن ثَم نصف القطر r للعملة يساوي 1 وحدة. مساحة العملة هي $\pi r^2 = \pi$ ومساحة المربع هي: $2^2 = 4$. ومن ثَم تكون الإجابة في هذه الحالة $0.785 \approx \frac{\pi}{4}$.

المسألة ليست أصعب كثيرًا إذا كانت العملة أكبر من المربع. فمن حيث المبدأ يمكن حلُّها بنفس الطريقة، لكن الآن تبدأ أرباع الدوائر في الشكل السابق في التداخل؛ ومن ثَم فإن حساب مساحتها الكلية سوف يكون أصعب قليلًا، وإن كان لا يزال يعتمد على القواعد الأساسية للرياضيات. ويقحم علماء الرياضيات أنفسهم أحيانًا في مسائل تصبح مربكةً بعض الشيء إذا لم تنطوِ على شيء جديد. وربما تجدر الإشارة إلى أنه لا بدَّ من الإجابة عن السؤال عن مدى كبر العملة لكي نضمن أن تغطيَ أحد الأركان. وهذا سيحدث عندما تغطي أرباع الدوائر المربع بالكامل، وهذا ما نراه يحدث الآن عندما يساوي نصف قطر العملة على الأقل نصف طول قطر المربع، أو إذا أردنا التبسيط عندما يكون طول قطر العملة مساويًا على الأقل لطول قطر المربع.

هذه مسألة احتمالات هندسية، وهي فرع من الرياضيات يدرس سلوك الأشكال الاحتمالي. ويمكن تطبيق الاحتمالات الهندسية في المسائل التي تحتوي استنتاجًا عن كائن من مشاهدات قطاعات عرضية عشوائية للكائن — وقد يكون الكائن المعني أي شيء، سواء كان هذا الشيء عينة من معدن خام أو نسيجًا من المخ. والأكثر من ذلك، أن المسائل الوجيهة، مثل مسألة العملة المتدحرجة على رقعة الشطرنج، غالبًا ما تسفر عن نتيجةٍ



شكل ٦-٢

مفيدة. فهذه المسألة توضح أن من الممكن تعيين قيمة العدد π من خلال تجربة دحرجة العملة: إذا كررت التجربة مرات عديدة بعملة يساوي قطرها طول ضلع المربع، فإن قيمة π ستقرب إلى أربع مرات نسبة النجاح في التجربة، والنجاح هنا يعني أن تغطي العملة الركن.

الحصول على العدد π من هذه المسألة لا يثير الدهشة نظرًا لأن المسألة تحتوي على كائن دائري. إلا أن قيمة π يمكن تقديرها بواسطة السؤال التقليدي عن الاحتمال الهندسي، أي مسألة إبرة بوفون التي يبدو أنها لا تحتوي إلا على خطوط مستقيمة.

ها هي المسألة. أسقطت إبرة على ألواح الأرضية. فما احتمال أن تسقط الإبرة في شق بين الألواح؟ مرة أخرى الإجابة تعتمد على طول الإبرة، ومرة أخرى فهي تحتوي π؛ ومن ثَم فإننا نستطيع أن نوجد تقديرًا لقيمة π عن طريق ملاحظة نسبة حالات سقوط الإبرة في شق في تجربة طويلة الأمد. دون الخوض في حسابات، يمكنني إعطاء تفسير أين يوجد الجانب الدائري في المسألة بحيث تظهر π في الحل. سواء صادفت الإبرة شقًّا أم لا فهذا يعتمد على متغيرَين مستقلَّين: المسافة بين مركز الإبرة وأقرب شق، ويمكن أن يكون أي قيمة من 0 إلى نصف عرض لوح الأرضية، والزاوية التي تصنعها الإبرة مع الخط المار بمركزها والموازي لخط لوح الأرضية، وهذا أيضًا يمكن أن يكون أي قيمة بين 0 حتى 90°. هذا الجانب الأخير من الحسابات يُدخل حساب المثلثات الدائري في المسألة؛ ومن ثَم يؤدي في النهاية إلى حل يتضمن π.

وأخيرًا، ونحن ما زلنا نتحدث عن مسألة رقعة الشِّطْرنج، دعونا نفكر في السؤال التالي.

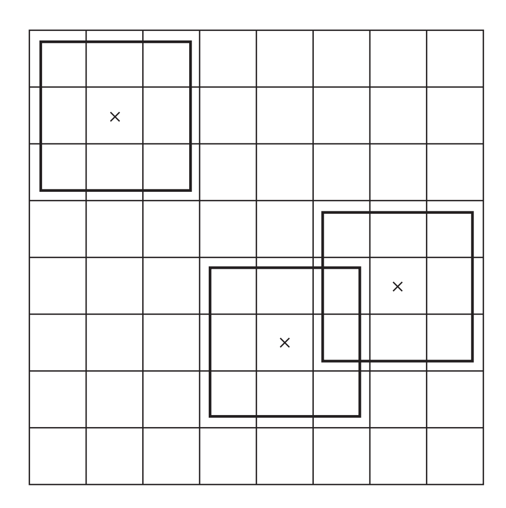
(٦) كم عدد المربعات على رقعة الشطرنج؟

هذه المسألة ليست تافهةً كما تبدو لأننا طبعًا لا نعني فقط $8 \times 8 = 64$ وحدة مربعة، بل أيضًا 2×2 و3×3 كل المربعات الأكبر. مرة أخرى مثل مسألة العملة المتدحرجة، ربما تكون أسهل قليلًا إذا حاولنا استخدام سمة هندسية أخرى تكافئ السمة محل النظر حاليًّا. لنكون أكثر دقة، دعونا نقُل إن الأسهل، على سبيل المثال، أن نحصيَ كل المربعات 3×3، عن طريق إحصاء مراكزها (شكل ٦-٣). يشكل مربع الوحدة نفسه مركزًا لمربع 3×3 إذا — وفقط إذا — لم يكن واقعًا على حافة الرقعة: هذه المربعات تمثل رقعة صغيرة 6×6 داخل الرقعة الأصلية؛ ومن ثَم يوجد 36 مربعًا من هذا النوع. مراكز المربعات 2×2 هي جميع أركان المربعات المكونة للرقعة الأصغر المركزية 6×6؛ يوجد 7×7 من هذه الأركان أي 49 مربعًا 2×2. ومن ثَم فإن مجموع كل مربعات الوحدة، والمربعات 2×2، والمربعات 3×3، يساوي $6^2 + 7^2 + 8^2$. ومن ثَم لا توجد صعوبة في أن تقتنع أن العدد الكلي للمربعات على هذه الرقعة هو مجموع المربعات:

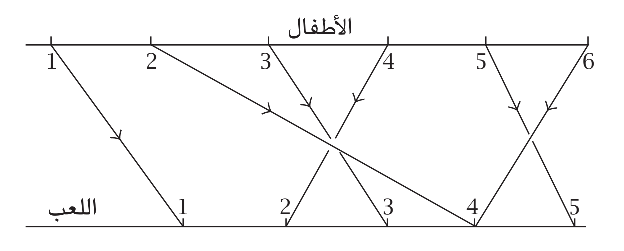
$$8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 204.$$

هذه الحُجة، طبعًا وبالمثل، ستحل المسألة لأي رقعة بأي أبعاد. ورغم ذلك، فسيكون من الجيد أن نصل إلى صيغة لجمع المربعات كما وصلنا إلى واحدة لجمع الأعداد الصحيحة (الفصل الأول، مسألة رقم 7). وسوف نوجد واحدة في الفصل القادم.

قبل عرض السؤال التالي، أود أن أقدم تمهيدًا بسيطًا. إذا كان لدينا 6 أطفال و5 لعبات، فسيكون لدينا مشكلة؛ فعلى الأقل يجب أن يشترك طفلان في لعبة. وهذا مثال على مبدأ مهم جدًّا في الرياضيات يعرف باسم «مبدأ برج الحمام» أو «مبدأ فتحات حفظ رسائل البريد». وهذا المبدأ ينصُّ على أنه إذا كان لدينا خطابات عددها n يجب وضعها في عدد m من فتحات حفظ البريد وكانت $n > m$ (أي إن n أكبر من m)، فإن فتحة واحدة على الأقل يجب أن تحتويَ على خطابَين أو أكثر. بتطبيق ذلك على مجموعة الأطفال التي تحدثنا عنها، يجب اعتبار اللُّعب وكأنها فتحات البريد، والأطفال هم الخطابات؛ الصعوبة هي أن $6 > 5$ ومن ثَم فإحدى اللعب على الأقل يجب أن يتقاسمها طفلان (شكل ٦-٤).



شكل ٦-٣



شكل ٦-٤

هذه الفكرة يمكن استخدامها لكي نثبت، بما لا يدع مجالًا للشك، الأشياء التي تظهر للوهلة الأولى بعيدة عن الوضوح. إذا كان ثمة مدينة بها 400 ساكن، فإنه يوجد ساكنان على الأقل لهما نفس تاريخ الميلاد؛ لأن عدد السكان يزيد على عدد أيام السنة. وللسبب نفسه، يوجد في لندن شخصان على الأقل لهما نفس العدد من الشعر على رءوسهم: يوجد أكثر من 7 ملايين شخص، لكن عدد شعر رأس أي فرد لا يزيد على 250 ألف شعرة. (هذا ليس واضحًا من تلقاء نفسه، ولكنه قابل للتصديق بدرجة كبيرة؛ وإذا ما شُكِّك به، يمكننا زيادة العدد لعدة ملايين وسيظل مبدأ برج الحمام ينتج نفس النتيجة.) في الواقع يمكننا أن نقول أكثر من ذلك. يجب أن يكون في العاصمة على الأقل $6\frac{3}{4}$ شخص يحتمل

أن يتساوى أحدهم في عدد شعر رأسه مع شخص آخر في لندن؛ والسبب في هذا أن عدد الناس في لندن الذين لا تنطبق عليهم هذه المقولة لا يمكن أن يزيد عن 250 ألف شخص. ها قد ظهر أمامنا شيء من تعقيد هذا المبدأ ودقته. وسوف نستخدم الفكرة من ورائه لمعالجة مسألتنا التالية.

(٧) في أي حفل هل من الضروري أن يوجد شخصان لهما نفس العدد من الأصدقاء الحاضرين الحفل؟

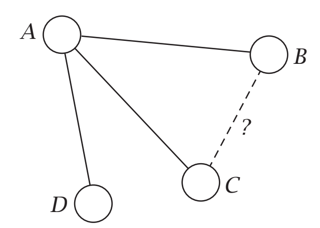
نعم، ضروري. ليكن عدد الناس في الحفل n. (وبالطبع ستكون $n \geq 2$ لأن الحفل لن يكون حفلًا إلا بحضور شخصين على الأقل.) وأكبر عدد من الأصدقاء لأي شخص في هذا الحفل هو $n - 1$، فمثلًا، المضيف قد يكون على عَلاقة جيدة بكل الضيوف الذين دعاهم. وأقل عدد هو 0. (هذا يبدو سيئًا لكن من الممكن أن يكون هناك متطفل على الحفل.) والآن لنفترض العكس، أي إنه لا يوجد شخصان في الحفل لهما نفس العدد من الأصدقاء. لكل مشارك في الحفل، يوجد عدد مرفق، وسوف نطلق عليه «عدد الأصدقاء»، وهو يتراوح ضمنيًّا ما بين 0، و$n - 1$. ونفترض أن جميع هذه الأعداد مختلف بعضها عن بعض. ليس هذا سهلًا لكنه يبدو ممكنًا: يوجد أعداد مختلفة قدرها n توزع بين عدد n من الأشخاص، وهذا يعني أن كلًّا من هذه الأعداد (0 و1 و2 و... و$n - 1$) استخدم مرة واحدة. إلا أن هناك تفصيلة نهائية تجعل هذا الأمر مستحيلًا. لنفترض أن شخصًا ما P عدد أصدقائه 0 (ليس لديه أي صديق في الحفل) وشخصًا آخر Q عدد أصدقائه هو $n - 1$، هذا يعني أن Q يعتبر كل من في الحفل، بما فيهم P، أصدقاءه. على أية حال، إذا كان Q وP أصدقاء فإن P لا يمكن أن يكون له عدد 0 من الأصدقاء. وبذلك نكون قد وصلنا إلى النتيجة أن الافتراض بعدم وجود شخصَين لهما نفس العدد من الأصدقاء يؤدي إلى تناقض منطقي؛ ومن ثَم فإن هذا الافتراض خاطئ. البديل الوحيد هو أن هناك مدعوَّين في الحفل لهما عدد متساوٍ من الأصدقاء حاضرون في الحفل، ويجب أن يكون الأمر كذلك، في كل حفل أقيم في الماضي أو سيقام في المستقبل أو في أي وقت.

وفيما يلي مسألة أخرى تتعلق بالحفلات.

(٨) في أي حفل من ستة أفراد أو أكثر، هل يوجد بالضرورة ثلاثة يعرف بعضهم بعضًا أو ثلاثة غرباء؟

الإجابة نعم، والحُجة التي سأقدمها هنا لترسيخ هذه القاعدة بسيطة ولكنها دقيقة جدًّا. وتكمن الصعوبة في أن وجود ستة أشخاص في الحفل، مثلًا، يقتضي وجود الكثير من الترتيبات الممكنة لشكل المعرفة بينهم. وحُجتنا ينبغي أن تكون قادرةً على التعامل معها جميعًا. وإذا انحرفنا عن الصواب، فسننجرف في عدد رهيب من الحالات. مرة أخرى، نحن في حاجة إلى وضع إصبعنا على المفتاح الرئيسي للمسألة.

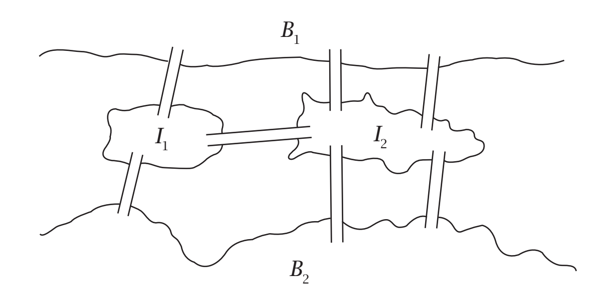
لنأخذ أي ستة أفراد في الحفل ونركز على واحد منهم ولنسمِّه A (شكل ٦-٥). إما أن A يعرف على الأقل ثلاثة من الخمسة الآخرين، أو إذا لم يكن يعرف، فهناك على الأقل ثلاثة منهم لا يعرفهم. (هذا هو المكان الوحيد الذي نستغل فيه حقيقة وجود ستة أفراد.) ولنفترض الآن أن A يعرف ثلاثةً من هؤلاء. إذن، فإما أن يكون هؤلاء الثلاثة غرباء بعضهم عن بعض، وفي هذه الحالة وُجد المثلث المطلوب من ثلاثة لا يعرف أحدهم الآخر، أو على الأقل اثنان منهم C وB مثلًا يعرف أحدهما الآخر. ومن ثَم يجب أن نلاحظ فقط أن ثلاثة أفراد C وB وA يشكلون مثلثًا من المعرفة المتبادلة. في الحالة البديلة حيث يوجد ثلاثة أشخاص لا يعرفهم A، فإن الحُجة هي نفسها، أنت تحتاج فقط إلى تطبيقها مرة أخرى عن طريق مبادلة «المعرفة المتبادلة» و«عدم المعرفة المتبادلة». نستنتج من ذلك أنه من المستحيل تجنب ثلاثي المعرفة المتبادلة أو عدم المعرفة المتبادلة عندما يجتمع ستة أفراد أو أكثر معًا.



شكل ٦-٥

نحن نحتاج حقًّا لستة أفراد على الأقل لاستخدام هذه الحُجة. لرؤية ذلك، تصور حفلًا من خمسة أفراد يجلسون حول مائدة عشاء، وافترض أن كل فرد يعرف الفردَين الجالسَين بجواره فقط ولا يعرف الفردين الآخرين. في هذا الحفل لا توجد مجموعة من

ثلاثة يعرف أحدهم الآخر وأيضًا لا يوجد ثلاثة لا يعرف أحدهم الآخر، كما يمكن رؤيته برسم صورة مناسبة.



شكل ٦-٦

بعض المسائل التي تطرَّقنا إليها يمكن تعميمها بسهولة على أعداد أكبر، لكن هذه المسألة لا يمكن تعميمها. لفهم ما أريد قوله، فكر في المسألة نفسها، ولكن هذه المرة اسأل نفسك: ما عدد الموجودين بالحفل حتى نتأكد من وجود مجموعة من أربعة أفراد يعرف بعضهم بعضًا أو أربعة غرباء لا يعرف أحدهم الآخر. ستجد أنه من الصعب تعميم النهج الذي اتبعناه سابقًا. ويمكن أن يساورك الشك أنه لا توجد إجابة للسؤال؛ فعلى الرغم من كل شيء، من الممكن تفهُّم أنه مهما كان عدد الأفراد المشاركين في الحفل كبيرًا، فربما يمكن ترتيب الأمور بحيث لا يظهر أبدًا أي نوع من الرباعيات المطلوبة. ولكن الحقيقة ليست كذلك، وهذا ما أثبته عالم الرياضيات الإنجليزي فرانك رامزي في الثلاثينيات من القرن العشرين. وتعد نظرية رامزي هي نتيجة عبقرية مفيدة في رياضيات التوافيق التي تؤكد أنه إذا أُعطيت أي عدد m، في أي تجمع كبير بما يكفي من الناس (أصغر عدد n يعتمد على m) توجد مجموعة من m من الأفراد الذين يعرف بعضهم بعضًا أو لا يعرف بعضهم بعضًا. على سبيل المثال أنت في حاجة لعدد 18 شخصًا على الأقل لتضمن وجود مجموعة من أربعة أشخاص؛ ونحن نقول إن عدد رامزي الرابع هو 18. ولا أحد يعرف قيمة العدد الخامس أو أي عدد تالٍ لرامزي، ولكنها موجودة بالفعل؛ وقد أثبت رامزي ذلك.

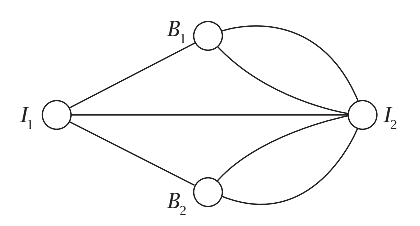
مسألتنا التاسعة تتعلق بموضوع سنتناوله في الفصل الأخير، وهو موضوع الشبكات. وهي مسألة كلاسيكية تعرف باسم «جسور كونيجزبرج». تقع مدينة كونيجزبرج البروسية

القديمة على ضفتَي نهر بريجوليا، وقد أُنشئ فيها سبعة جسور تُوصل إلى الضفتين وكذلك إلى جزيرتين في وسط النهر (انظر شكل ٦-٦). فيما يلي السؤال المطروح:

(٩) هل يمكن للمرء أن يعبر كل جسور مدينة كونيجزبرج مرة واحدة فقط؟

المواطنون الذين لم يصلوا إلى إجابة لهذا السؤال طلبوا عون عالِم الرياضيات أويلر، وقد شرح لماذا لا يمكن القيام بذلك. ورغم سهولة المسألة، فقد كانت الأولى في نظرية الشبكات؛ ومن ثم كانت تحتاج لنهجٍ جديد: فحتى ذلك الوقت لم تكن هذه المسألةُ تُعامَل على أنها مسألة رياضية.

فيما يتعلق بشبكة الجسور، يوجد أربعة أماكن فقط يمكن أن يبدأ المشي منها، كما تشير الحروف المكتوبة على شكل ٦-٦. التبسيط الأول في الطريقة التي ننظر بها إلى المسألة هو تمثيل هذه الأماكن الأربعة (ضفتي النهر والجزيرتين) كعُقَد أو نقاط في شكل توضيحي. ثم نرسُم خطًّا للدلالة على كل جسر يربط بين عقدتين، لنحصل على الرسم التوضيحي في شكل ٦-٧، وهو شكل بسيط ويحتوي كل المعلومات ذات الصلة بالمسألة.



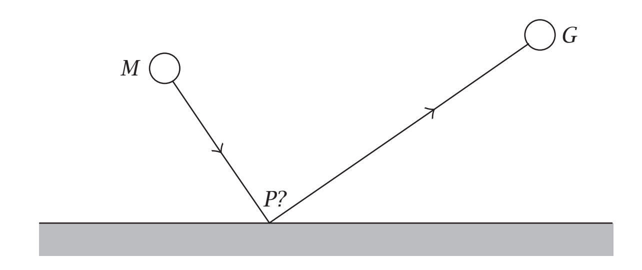
شكل ٦-٧

فلنفترض أن هناك شخصًا ما عبر كل الجسور مرةً واحدة فقط. سوف تبدأ الرحلة عند عُقدة وتنتهي عند عُقدة (ربما تكون نفس عُقدة البداية)، ولكن سيوجد على الأقل عُقدتان لن يكونا نقطتَي البداية أو النهاية في الرحلة. لتكن X هي إحدى هاتين العُقدتين. لذلك سوف نصل إلى X عددًا من المرات ونغادر X عددًا مساويًا من المرات. وهذا سوف يجعلنا نستخدم عددًا زوجيًّا من الجسور؛ في كل مرة تصل إلى X ثم تغادرها تستخدم عددًا زوجيًّا من الجسور التي لن يُسمَح بعبورها ثانية. ومن ثَم فإن X يجب أن تتصل

بعدد زوجي من الجسور. للأسف الشديد هذا لا ينطبق على أيٍّ من العُقَد الموجودة في الشكل: I_2 تتصل بخمسة جسور، في حين أن كلًّا من العُقَد الأخرى تتصل بثلاثة جسور لكل منها. وهذا يعني أنه لا يوجد مسار تنطبق عليه الخصائص التي نبحث عنها.

هذا النوع من المسائل أصبح مألوفًا ومعروفًا شعبيًّا كلُغز: ارسم هذا الشكل دون أن تمر على نفس الخط مرتين (أي إن الجسر لا يُعبَر مرتين) ودون أن ترفع القلم عن الصفحة (لا تقفز). سوف نحُل هذا النوع من المسائل بشكلٍ كامل في الفصل العاشر، إلى جانب مجموعة من التطبيقات المختلفة، بعضها أكثر حداثة. في المقابل، مسألتنا التالية قديمة جدًّا في الواقع وقد نسبت إلى العَالِم هيرون السكندري في عام ٧٥ ميلادية تقريبًا.

ماري تعيش في M وترغب في زيارة جدتها في G بعد أن تشرب من النهر كما هو واضح في شكل ٦-٨.



شكل ٦-٨

(١٠) ما أقصر طريق تأخذه ماري في رحلتها؟

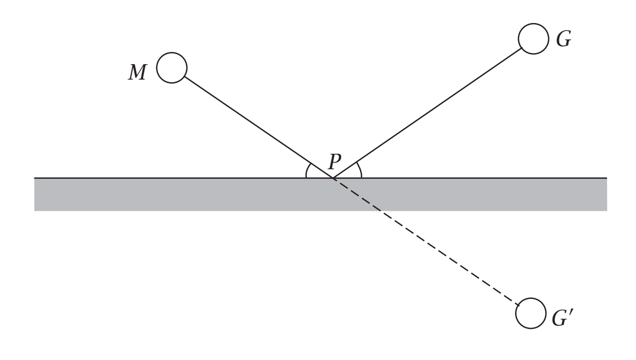
لأن أقصر مسافة بين نقطتين هي الخط المستقيم، فإن طريق ماري سيتكون من خطين متصلين، الأول من M إلى نقطةٍ ما (P) على النهر، والثاني من P إلى G (شكل ٦-٨). السؤال الوحيد المتبقي هو: كيف تختار ماري النقطة P؟

هذا السؤال قد يكون محيرًا حتى نرى أنه سؤال عن الانعكاس. لننظر إلى السؤال من هذا المنطلق. لنفترض أن ماري لها أخت توءم اسمها ماريا تعيش معها وترغب في زيارة أخت جدتها التوءم التي تعيش عند G' التي تقع في الجهة المقابلة تمامًا من G على الضفة

الأخرى من النهر، تمامًا على نفس المسافة من ضفة النهر مثل G. سوف تنتقل الأختان معًا إلى نقطة P متفق عليها على النهر، ويشربان معًا من النهر، ثم يتفرقان فتتجه ماري إلى G وماريا إلى G'. (ماريا عليها عبور النهر ولكن هذا لا يغير من حل المسألة.)

حيث إن G' تقع على انعكاس G بالنسبة للخط الذي تصنعه ضفة النهر، فإن المسافتين PG و PG' متساويتان لأن PG' هي انعكاس PG. ومن ثَم يمكننا تقصير رحلة ماري إذا قصرنا من طول رحلة ماريا، ولكن هذا سهل؛ لأن ماريا لتقصير رحلتها قدر الإمكان، عليها أن تنتقل في خطٍّ مستقيمٍ من M إلى G'. ومن ثَم حدَّدنا أفضل موقعٍ للنقطة P: وهي تقاطع خط ضفة النهر مع الخط الواصل بين M و G' حيث G' هي انعكاس G، بالنسبة لخط النهر.

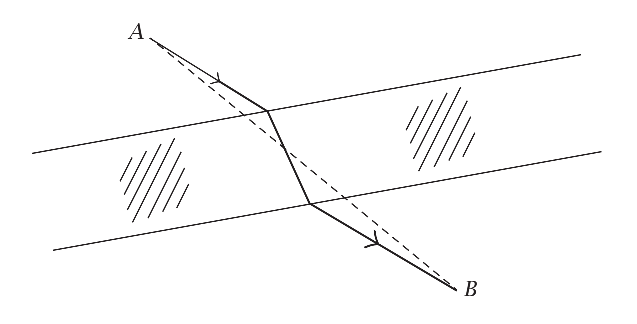
توجد صلة وثيقة حقيقية ما بين هذه المسألة الجميلة وسلوك الضوء. حيث إن شعاع الضوء المرسل من M ليصطدم بمرآة وضعت عند P بحيث يكون وجهها على خط النهر سوف ينعكس إلى G لأنه، كما نرى في شكل ٦-٩، P وضعت في هذا الموقع بحيث تكون الزاوية التي يصنعها النهر مع MP تساوي التي يصنعها مع PG. وهذا يوضح الكفاءة الطبيعية للضوء؛ لأننا نرى أن الشعاع الضوئي يأخذ أقل وقت ممكن لينتقل من M إلى G عبر ضفة النهر.



شكل ٦-٩

هذا مثال على مبدأ فيرما لأقل زمن، الذي ينطبق أيضًا على انتقال الضوء عبر الأوساط المختلفة الكاسرة للأشعة كما هو موضح في شكل ٦-١٠. شعاع الضوء هنا لا ينتقل عبر أقصر مسار من A إلى B ولكن عبر المسار الذي يحتاج لأقل زمن: الخط المستقيم من

A إلى B سينطوي على اضطرار الشعاع للمرور عبر الوسط الأكثر كثافة، الزجاج؛ ومن ثَم ستقل سرعته؛ ومن ثَم فإن الضوء الذي سينتقل عبر هذا المسار (إذا كان هذا مقبولًا من الناحية الفيزيائية) سوف يستغرق وقتًا أطول للوصول إلى B مقارنة بالوقت الذي سيستغرقه إذا اتخذ المسار الموضح. ويمكننا أن نستنتج من مبدأ فيرما قانون الانكسار الذي يطلق عليه أيضًا قانون سنيل، وهو يخص النسبة بين جيبي زاوية سقوط وزاوية انكسار الشعاع المار بين وسطَين شفافَين.



شكل ٦-١٠

الفكرة الكامنة وراء هذه المسألة عادت للظهور في القرن التاسع عشر، في سياق يبدو أنه مختلف تمامًا؛ وهو إيجاد احتمالات أن المرشح الفائز في انتخابات سيظل متصدرًا طَوال فترة إحصاء الأصوات. وسوف نرى كيف نجيب عن هذا النوع من الأسئلة باستخدام مبدأ الانعكاس في الفصل الثامن.

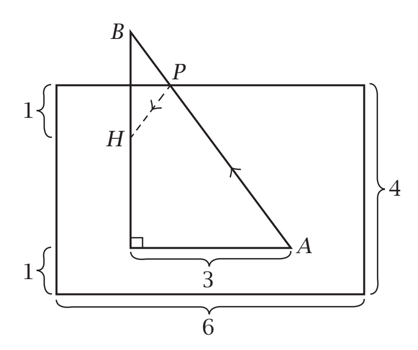
المسألة الآتية يمكن التفكير فيها بنفس الطريقة. توجد نملة على السطح الخارجي لكوب زجاجي أسطواني الشكل ارتفاعه 4 بوصات ومحيطه 6 بوصات. في داخل الكوب وعلى بعد بوصة واحدة من أعلاه توجد قطرة من عسل النحل. والنملة تقف على الجانب العكسي من الكوب بالنسبة لقطرة العسل وعلى بعد بوصة واحدة من قاع الكوب.

(١١) كم تبعد النملة عن قطرة العسل؟

السؤال سيكون أسهل جدًّا إذا تناولناه متصورين أن الأسطوانة قد فُتحت وتم فردها لتصبح مستطيلًا مستويًا. (مع التخلص من قاع الأسطوانة!) النملة التي تبدأ عند النقطة

A، يجب أن تسير صاعدةً على السطح الخارجي للكوب إلى أن تصل إلى النقطة P ثم تنزل إلى أسفل حتى تصل إلى العسل عند النقطة H: انظر شكل ٦-١١. ويمكننا أن نرى الآن أن هذه ليست إلا صورة أخرى من مسألة هيرون، مع إحلال النقطة A محل النقطة الأصلية M والنقطة H محل النقطة G؛ والمطلوب هو تعيين النقطة غير المعروفة P على حافة الكوب.

مرة أخرى نستخدم مبدأ الانعكاس: B تقابل G' ومن ثَم فإن P هي نقطة تقاطع الخط الواصل من A إلى B مع الحافة العليا للكوب. ومن ثَم فإن طول أقصر مسار APH يساوي AB، ومن نظرية فيثاغورث نجد أن: $AB^2 = 4^2 + 3^2$ أي إن الطول AB يساوي 5 بوصات.



شكل ٦-١١

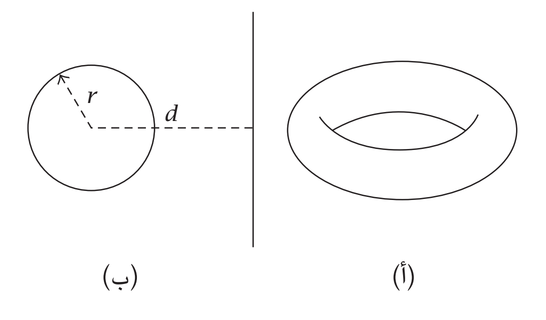
لا ينبغي أن تخجل أبدًا من أن تتشكك في أي حُجة مثيرة للرِّيبة مثل هذه الحُجة؛ فرغم أنها صحيحة، فهي تنطوي على وثبة في التفكير وهو ما يجب أن نلاحظه على الأقل. نحن لم نُجب عن سؤال الأسطوانة، ولكن أجبنا عن سؤال المستطيل الناتج من قص الأسطوانة لفتحها. فهل هذا يغير المسألة؟ مؤكد أننا إذا حاولنا التعامل مع مسألة مماثلة عن الكرة بفردها لتصبح مستوية، فإن الانحرافات الناتجة ستؤدي إلى إجابة خاطئة. الشيء الجيد في الأسطوانة هو أنها ليست منحنية في الحقيقة؛ ومن ثَم فإن فرد السطح المنحني للأسطوانة لا يسبب أي تشويه. لا سيما أن طول أي مسارٍ على الأسطوانة لن يتغير بعد فردها. تخيل نفسك قطعة من الخيط مفرودة على سطح أسطوانة دون مط. عند فتح الأسطوانة فإن شكلك سيتحول من منحنًى إلى خط مستقيم لكن بنفس

الطول؛ ولن يتم مطك وفي الوقت نفسه لن تكون متراخيًا. وهذا هو السبب في أن المسألتَين متكافئتان وأن حل الثانية يعني حل الأولى.

إذا كنت مستعدًّا لأن تعتقد أننا يمكننا أن نفعل هذا الشيء مع الأسطوانات، إذن فنحن نستطيع حل المزيد من المسائل كالمسألة التالية.

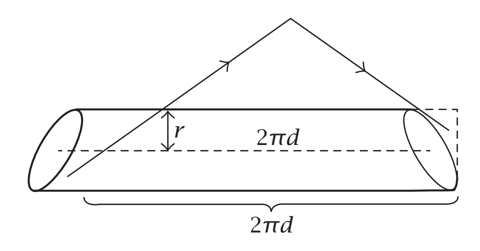
(١٢) ما حجم كعكة الدونات؟

الاسم الرياضي الصحيح لشكل الدونات هو الطارة (شكل ٦-١٢(أ)). وهو الشكل الناتج من دوران دائرة حول خط «المحور» في مستوى الدائرة، بحيث لا يتقاطع الخط مع الدائرة. ولتكن r هي نصف قطر الدائرة، وd هي المسافة من مركز الدائرة حتى محور الطارة (كما في شكل ٦-١٢(ب)).



شكل ٦-١٢

تعد الطارة واحدة من الكائنات الرياضية الأساسية في الكون. وهذه الحقيقة ليست واضحةً بذاتها على الإطلاق؛ ولذا فأنا حريص على ذكرها على سبيل التحذير. الكثير من كتب الرياضيات، وعلى الأخص كتب الطوبولوجيا، يمكن أن تثير حنقك بعدم توضيحها القاطع للأشياء التي يمكن أن تنفذ على سطح الطارة أو لا؛ ومن ثم فمطالعتها قد تبدو أسوأ طريقة تقضي بها يوم عطلتك في المنزل، حتى وإن كانت السماء تمطر بغزارة مانعةً إياك من الخروج. إلا أن هذه الأسئلة مهمة بحق. ولكني لن أحاول أن أثبت هذا الآن؛ وإنما سأبدأ في شرح كيفية إيجاد حجم الدونات.



شكل ٦-١٣

الفكرة أن نقطع الدونات عبر مقطع عرضي دائري ثم نفردها بحيث تصبح أسطوانة مشطوفة عند الطرفين بمقدار نصف أسطوانة من كل طرف (شكل ٦-١٣). ويمكننا تشكيل أسطوانة كاملة واحدة من هذا الكائن عن طريق قطع نصف الأسطوانة من أحد الطرفين، ثم قلبه، وتركيبه عند الطرف الآخر بحيث يكمل نصف الأسطوانة الناقص في هذا الطرف. كما تتذكر، حجم الأسطوانة هو مساحة القاعدة في الارتفاع. وفي هذه الحالة قمنا بإعادة تشكيل الطارة إلى أسطوانة نصف قطرها r، وهو نصف قطر القطاع العرضي الدائري للطارة، وارتفاعها هو طول محيط الدائرة التي نصف قطرها d ويساوي $2\pi d$. ومن ثَم فإن الحجم V للطارة هو $(2\pi d)\ (\pi r^2)$. أي:

$$V = 2\pi^2 dr^2.$$

بطريقة مماثلة، مساحة سطح الطارة تساوي مساحة سطح الأسطوانة. وعندما نقص الأسطوانة لفتحها بشكل موازٍ لمحورها ثم نفردها بحيث تصبح مستوية، فإننا نشكل مستطيلًا ارتفاعه يساوي ارتفاع الأسطوانة وعرضه هو محيط قاعدتها. مساحة هذا المستطيل، ومن ثَم مساحة سطح الطارة S هي $(2\pi d)(2\pi r)$ أي:

$$S = 4\pi^2 dr.$$

الفصل السابع

المتسلسلات

(١) بعض أمثلة للمتسلسلات

تنطوي بعض من أبسط المسائل التي تقابلها في البداية في الرياضيات على اكتشاف الأنماط في متتابعة من الأعداد. وهذا، بطبيعة الحال، يؤدي إلى أسئلة عن المتسلسلات، وعن جمع متتالية من الأعداد، وسرعان ما يجد المرء نفسه في المياه العميقة، وربما دون أن يدرك ذلك. وعلى الرغم من أن هذا الكتاب لا يمثل مقررًا في هذه الأمور، فإنني يرضيني أن أصف في هذا الفصل نتائج عن المتسلسلات، لا أن أذكر كيفية الوصول إلى هذه النتائج. أمَّا في الحالات التي تخضع فيها المتسلسلات لعمليات بسيطة وقصيرة، فسوف أقدم شرحًا كاملًا.

على مدى القرون القليلة السابقة، استُثمِر كمٌّ مذهل من الجهد والإبداع العبقري في المسائل التي تنطوي على جمع متسلسلة من الأعداد. بالطبع يمكننا دائمًا جمع أي مجموعة معينة من الأعداد؛ وما أُشير إليه هنا هي المسائل المتعلقة بالمتسلسلات غير المنتهية مثل:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1, \qquad (7\text{-}1)$$

أو المسائل المتعلقة بالمتسلسلات المنتهية مثل مسألة رقعة الشِّطْرنج التي ذكرناها في الفصل السابق، حيث نسأل عن صيغة باستخدام n لحساب مجموع أول عدد n من نوع معين؛ وفي تلك المسألة كان المطلوب هو إيجاد مجموع المربعات الموجودة في رقعة الشِّطْرنج:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \qquad (7\text{-}2)$$

في حين أن بعض المتسلسلات لا يمكن التعامل معها إلا باستخدام آلاتٍ رياضية مُعقدة، فإن بعضها الآخر من السهل التعامل معه بقواعد الجبر البسيطة، بما في ذلك المثالان السابقان اللذان سنتحدَّث عنهما في وقتٍ لاحق.

علينا أن نقدم بعض التوضيح فيما يخص المتسلسلات غير المنتهية؛ لأننا لا يمكننا أن نزعم أننا نجمع المتسلسلة غير المنتهية من الأعداد التي رأيناها في المعادلة رقم (7-1) بالطريقة نفسها التي نستخدمها لجمع متسلسلة منتهية مثل تلك الموجودة في معادلة رقم (7-2). ولنُنحِّ ذلك جانبًا للحظة، ولنبدأ بقائمة من الأمثلة لشرح كيف أن المتسلسلات المتماثلة ظاهريًّا يمكن أن تسلك سلوكًا مختلفًا تمامًا. في الوقت الحالي سأترك لك أيها القارئ الحصول على نمط الحدود في كل من المتسلسلات التالية، وسوف نكشف المزيد من التفاصيل بعد قليل.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\infty \qquad (7\text{-}3)$$

$$4-\frac{4}{3}+\frac{4}{9}-\frac{4}{27}+\frac{4}{81}-\cdots=3 \qquad (7\text{-}4)$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\ln 2=0.6931\ldots \qquad (7\text{-}5)$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}=0.7854\ldots \qquad (7\text{-}6)$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}=1.645\ldots \qquad (7\text{-}7)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots=1 \qquad (7\text{-}8)$$

$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\frac{1}{125}+\cdots=? \qquad (7\text{-}9)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \cdots = \frac{1}{e} = 0.3679\ldots \qquad (7\text{–}10)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots = 2 \qquad (7\text{–}11)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \cdots = \infty. \qquad (7\text{–}12)$$

في المتسلسلة (3-7): يعتبر الحد الذي ترتيبه n هنا هو $\frac{1}{n}$ وتعرف هذه المتسلسلة باسم المتسلسلة التوافقية. ما الذي نعنيه بقولنا إن المجموع لا نهائي؟ لنبدأ الشرح بمثال أبسط.

متسلسلة مثل:

$$1 + 1 + 1 + \cdots$$

من الواضح أنها تتباعد إلى اللانهائية، بمعنى أنه كلما جمعنا حدودًا أكثر من المتسلسلة زاد المجموع متجاوزًا كل الحدود؛ في هذه الحالة مجموع n من الحدود الأولى هو n. لقد رأينا أن هذا لا يحدث دائمًا، وفي الواقع، ما دامت حدود المتسلسلة تقترب من الصفر، فإن المجموع المأخوذ من متسلسلة غير منتهية من الأعداد الموجبة قد يقترب من حدٍّ معين: على سبيل المثال، لننظر إلى مثالنا (1-7)؛ كلما جمعنا أكثر وأكثر من الأعداد من هذه المتسلسلة اقتربت المجاميع أكثر من القيمة النهائية 1. نفهم من ذلك إذن أن السؤال عن متسلسلة غير منتهية تتقارب إلى حدٍّ معين لا يثار إلا إذا كانت حدود المتسلسلة تتقارب من الصفر. والآن المتسلسلة (3-7) تستوفي هذا المعيار: كلما زاد n، تتناقص الحدود $\frac{1}{n}$ بانتظام مقتربة من الصفر؛ ولذا يبدو أن هناك احتمالَ أن يقترب مجموع الحدود من قيمة نهائية مثلما حدث في المتسلسلة (1-7). لكن ليس هذا هو ما يحدث: إذ تتباعد المتسلسلة إلى ما لا نهاية، بمعنى أنه لأي عدد سواء 10 أو 10 ملايين، فإن هذا العدد سيجري تجاوزه إذا جمعنا حدودًا كافية من المتسلسلة. وهذا الموضوع ليس واضحًا من تلقاء نفسه، إلا أنني سوف أثبت بعد قليل أنه صحيح. عدد الحدود المطلوب لتجاوز 10 سيكون أكثر من 20,000، أما عدد الحدود المطلوب لتجاوز 10 ملايين فهو كبير بدرجة هائلة.

ما الفرق بين المتسلسلة (7-1)، والمتسلسلة (7-3) الذي قد يكون مسئولًا عن التفاوت في سلوكيهما؟ يكمن الفرق المهم في حقيقة أن الحدود في المتسلسلة الأولى $\frac{1}{2^n}$ تتقارب إلى الصفر بسرعة أكبر بكثير من حدود $\frac{1}{n}$. بالنسبة للقيم الكبيرة من n، فإن الحدَّين بالطبع صغيران جدًّا، ولكن الحد الذي ترتيبه n في المتسلسلة الأخيرة لا يزال أكبر بكثير جدًّا من الحد الذي ترتيبه n في المتسلسلة الأولى. على سبيل المثال، إذا كانت $n = 16 = 2^4$ (لقد اخترنا العدد 16 لا لشيء إلا لأنه يعتبر قوة للعدد 2؛ ومن ثم فإن الحسبة التالية تصبح بسيطة):

$$\frac{1}{16} \div \frac{1}{2^{16}} = \frac{2^{16}}{2^4} = 2^{12} = 4096,$$

ومن ثَم لقيمة $n = 16$، فإن $\frac{1}{n}$ أكبر آلاف المرات من $\frac{1}{2^n}$.

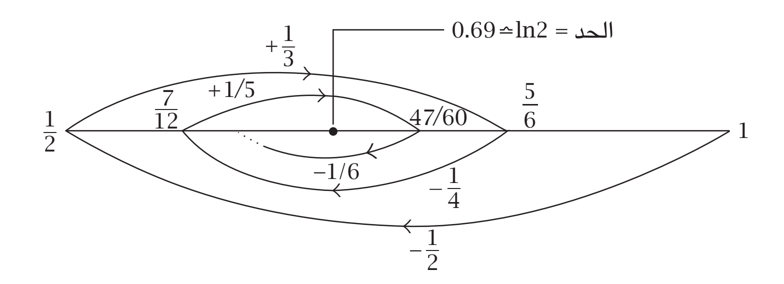
المتسلسلة (7-4): هي مثال لمتسلسلة هندسية (غير منتهية) وهي في الحقيقة مماثلة للمتسلسلة (7-1)؛ فلكي تمرَّ من حدٍّ إلى الحد التالي عليك أن تضرب في عدد ثابت، وهو ما يُطلق عليه النسبة المشتركة أو أساس المتوالية الهندسية وهو يساوي $-\frac{1}{3}$ في هذه الحالة. الحد الذي ترتيبه هو $4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$؛ وبالمثل الحد العام في المتسلسلة (7-1) هو $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ حيث النسبة المشتركة هي $\frac{1}{2}$. ومن السهل التعامل مع المتسلسلات الهندسية وهي مهمة بذاتها وأيضًا بوصفها أدوات لمعالجة أسئلة متسلسلات أكثر صعوبة. وسوف نرى كيف نوجد مجموع متسلسلة هندسية في وقت لاحق.

المتسلسلة (7-5): هي متسلسلة توافقية بإشارات متناوبة. من السهل جدًّا الاقتناع أن هذه المتسلسلة تتقارب من حدٍّ معين، بمعنى أن المجاميع المتعاقبة تقترب أكثر وأكثر من نهاية ما. إذا قمنا بتمييز بعض المجاميع المتعاقبة من المتسلسلة على خط الأعداد، كما في شكل ٧-١، فإنه يصبح واضحًا تمامًا ماذا يحدث. فالمجاميع المتعاقبة من المتسلسلة تتقافز على جانبَي قيمة نهائية، وتصبح القفزات أصغر وأصغر في كل مرحلة. وتنطبق هذه الملاحظة على أي متسلسلة من هذا النوع: فإذا كانت المتسلسلة متناوبة الإشارة وكانت القيمة المطلقة لكل حد أصغر من الحد الذي سبقه، فإن المتسلسلة تتقارب. في الواقع يمكن أن نقول أكثر من ذلك: إذا قمنا بإيجاد مجموع أول عدد n من الحدود، فإن الفرق بين هذا المجموع ومجموع المتسلسلة كلها لن يزيد على t_{n+1}، وهو الحد

التالي في المتسلسلة. في هذه الحالة، على سبيل المثال، مجموع الحدود الخمسة الأولى هو:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} = 0.78\dot{3},$$

وهو يزيد على القيمة النهائية بمقدار $0.0901\ldots$ وهو أقل من $\frac{1}{6}$ وهو الحد التالي في المجموع. مرة أخرى اختبار شكل ٧-١ يجب أن يقنعك بصحة هذه الملاحظة: عند أي مرحلة في المجموع، الحد التالي يدفعك لتجاوز حد النهاية، وهو ما يبين أن مجموع أول عدد n من الحدود في المتسلسلة أقرب إلى حد النهاية من t_{n+1}.



شكل ٧-١

هذا لا يساعدنا على أية حال في إيجاد القيمة الدقيقة لمجموع المتسلسلة (7-5) وهو $\ln 2$ (الرمز ln يعني اللوغاريتم الطبيعي، الذي يستخدم الأساس $e = 2.7183\ldots$). من الواضح أن هذه مسألة أصعب في الحل، فمن أين سيأتي اللوغاريتم على أية حال؟ هذه النتيجة ليست أساسية؛ ومن ثَم فهي تقع خارج نطاق هذا الكتاب؛ إذ تحتاج للقليل من التفاضل والتكامل لإيجادها.

المتسلسلة (7-6): أيضًا متسلسلة متناوبة الإشارة لحدود دائمة التناقص؛ ولهذا، كما في المثال الأخير، المتسلسلة تتقارب إلى نهاية، ولكن مرة أخرى القيمة النهائية، $\frac{\pi}{4}$، تعتبر قيمة غير متوقعة، فمن أين يأتي المقدار π؟ مرة أخرى هذه نتيجة نحصل عليها من خلال استخدام التفاضل والتكامل.

في المتسلسلة (7-7): نجمع مقلوبات مربعات الأعداد؛ أي إن الحد العام هو $\frac{1}{n^2}$. نظرًا لأن المتسلسلة التوافقية (7-3) لم تتقارب إلى قيمة نهائية، فقد تندهش من أن هذه المتسلسلة تفعل. وعلى الرغم من ذلك، فإن الحد الذي ترتيبه n في هذه المتسلسلة وهو $\frac{1}{n^2}$ هو أصغر بمقدار n من المرات من الحد الذي ترتيبه n في المتسلسلة التوافقية $\frac{1}{n}$، ويبدو أن هذا كافٍ لدفعها للتقارب. ومع ذلك فهذا غير واضح، ويحتاج لبعض التفسير. في هذا المثال، لا يخرج البرهان خارج حدود اهتمام الكتاب، ولكنه ينطوي على خدعة بسيطة سوف نتحدث عنها في وقت لاحق. إلا أن القيمة النهائية الغامضة $\frac{\pi^2}{6}$، سوف تظل خارج نطاق هذا الكتاب. فالطريقة المعتادة للحصول على هذه النتيجة هي استخدام تقنيات معينة من تقنيات متسلسلة فورييه، وهي تعتبر تقنيات مهمة في دراسة الموجات والحركة الدورية.

في المتسلسلة (7-8): هل وجدت النمط هنا؟ الحد الذي ترتيبه n في هذه الحالة هو $\frac{1}{n(n+1)}$. وهذا يبدو تقريبًا مثل المتسلسلة (7-7)، وفي الواقع سوف نرى كيف نستخدم التقارب في (7-8) لإثبات التقارب في (7-7). لحسن الحظ هناك خدعة جبرية بسيطة تثبت أن مجموع المتسلسلة (7-8) يساوي بالفعل 1، كما سترى لاحقًا.

المتسلسلة (7-9): هي متسلسلة صعبة للغاية بالتأكيد. فهي ببساطة مجموع مقلوب مكعبات الأعداد؛ ولهذا فهي شبيهة جدًّا بالمتسلسلة (7-7). ومن المؤكد أنه ليس من الصعب أن نثبت أن المتسلسلة تتقارب إلى نهايةٍ ما، ويمكن حساب هذه النهاية إلى أي عدد من الأماكن العشرية. ولكن ما ينقصنا هو إيجاد صيغة للمجموع بدلالة أعداد أخرى مثلما فعلنا في المتسلسلات (7-5) و(7-6) و(7-7). في الواقع، كانت صفة هذه القيمة النهائية غير معروفة حتى السنوات الأخيرة عندما أثبت الرياضي الفرنسي إيبري أنها قيمة غير نسبية. أما بالنسبة لمجموع معكوسات القوى الخامسة وما بعدها من القوى الفردية، فلم يحدد بعد. في المقابل، من المعروف، منذ زمن، أن مجموع معكوسات القوى الزوجية للأعداد الموجبة يمكن التعبير عنه كمضاعفات نسبية لقوى العدد π، (مجموع (7-7) كمثال) ومن ثَم فمجموع المعكوسات غير نسبي.

المتسلسلة (7-10): هي متسلسلة أخرى متناوبة الإشارة، الحد الذي ترتيبه n لها هو $\frac{1}{(n+1)!}$، مضروبًا في ± 1 وَفقًا لكون n فرديًّا أو زوجيًّا. هذه المتسلسلة تتقارب بسرعة كبيرة؛ إذ إن الفرق بين مجموع أول عدد n من حدودها وبين القيمة النهائية؛ دائمًا ما

يكون أقل من الحد التالي $\frac{1}{(n+2)!}$. فمثلًا، قارن مجموع أول ثمانية حدود، وهو يساوي 0.367888، بالقيمة النهائية 0.367879. ستجد أن الفرق هو 0.000009 فقط.

يمكن أن تكون مثل هذه المتسلسلات التي تتقارب بسرعة وسيلة مفيدة في الحسابات العملية. ويبدو أن هذه المتسلسلة على الأخص هي حل المسألة الطريفة التالية. لنفترض وجود عدد n من الخطابات المختلفة وأيضًا عدد n من الأظرف. ظن أحد الموظفين المهملين أن الخطابات محض مراسلات دورية متطابقة، فوضع كل خطاب في ظرف عشوائيًّا. فما احتمال عدم تطابق أيٍّ من الخطابات مع العنوان المدون على الظرف الذي وُضع فيه؟

يمكن حل هذه المسألة، بفضل أويلر، باستخدام ما يُعرف بمبدأ التضمين والاستبعاد. ونحن لن نتعمق في ذلك باستثناء أننا سنقول إن الإجابة هي مجموع أول عدد n من الحدود في المتسلسلة (7-10). ولهذا نتيجة مفاجئة لا تتفق مع الحدس للوهلة الأولى. الحدود اللاحقة من المتسلسلة صغيرة جدًّا بحيث يمكن عمليًّا إهمالها. وهذا يعني أنه إذا كان n، وهو عدد الخطابات، أكبر من 4 تقريبًا، فإن الإجابة ستكون تقريبًا نفسها وتقترب من القيمة النهائية $\frac{1}{e} = 0.3679$. بعبارة أخرى، إذا كان هناك 100 خطاب، فإن هناك احتمالًا أكبر من 36% أن يكون الموظف المسكين قد أرسل جميع الخطابات خطأ! وهو بلا شك سيظن نفسه سيئ الحظ جدًّا حتى يُخطئ 100 مرة في 100 مرة، ولكن الرياضيات للأسف تدينه.

في المتسلسلة (7-11): الحد الذي ترتيبه n هو $\frac{n}{2^n}$. مرة أخرى يمكنك تقدير هذا المجموع بقليل من التفاضل والتكامل. ومع ذلك، فحساب التفاضل والتكامل ليس ملزمًا؛ إذ يمكنك الحصول على النتيجة عن طريق إعادة كتابة (7-11) كمتسلسلة هندسية وجمعها معًا. وهذه حالة أخرى ينطوي فيها النهج الأساسي على عمل أكثر من استخدام التقنيات الأكثر تطورًا. ففي الرياضيات كلمة «أساسي» لا تعني بالضرورة السهولة؛ فهي تعني فقط أن المسألة قد حُلت دون اللجوء إلى الرياضيات الأكثر تعقيدًا.

المتسلسلة (7-12): هي متسلسلة من نوع مختلف؛ مجموع معكوسات الأعداد الأولية. وعلى الرغم من وجود عدد لا نهائي من الأعداد الأولية كما رأينا في الفصل الرابع، فإن هذا لا يستتبع بالضرورة أن تتباعد هذه المتسلسلة مثلما حدث في المتسلسلة التوافقية (7-3). فرغم كل شيء، يوجد عدد لا نهائي من القوى للعدد 2، ولكن مجموع معكوسات قوى 2، كما وضحنا في (7-1)، له قيمة نهائية هي 1. ويكفي القول إن

البرهان القياسي على أن مجموع معكوسات الأعداد الأولية يتباعد؛ برهانٌ قصيرٌ جدًّا وبُدائي، على الرغم من احتوائه على ملاحظة دقيقة. ولكني لن أذكرها هنا.

(٢) المتسلسلات المنتهية

رأينا في الفصل الأول، السؤال السابع ما يلي:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n (n + 1) . \qquad (7\text{–}13)$$

ومن ثم، نستطيع أن نوجد مجموع حدود أي متتابعة حسابية، وهي المتتابعة التي تبدأ بعدد a ويكون الفرق بين الحدود المتتالية عددًا ثابتًا d :

$$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1) d, \ldots$$

نظرًا لأن الحد الأول a، والحد الثاني $a + d$ وهكذا، فإن الحد الذي ترتيبه n ونرمز له بالرمز t_n نحصل عليه بجمع d مع a بإجمالي عدد $n - 1$ من المرات، بحيث يكون $t_n = a + (n - 1) d$. وتعتبر متسلسلة الأعداد الصحيحة الموجبة هي المتسلسلة الحسابية التي يكون فيها $a = d = 1$. ونرغب في الحصول على مجموع المتسلسلة الحسابية:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + a + (n - 1) d. \qquad (7\text{–}14)$$

يمكننا الحصول على النتيجة بمعلومية مجموع (7–13): إذ إن المجموع العام هو نفسه في الأساس مع تغيير المقياس (سيتغير الفرق بين أي عددين متتاليين من 1 إلى d) والإزاحة (بدلًا من أن نبدأ عند 1 نبدأ عند أي عدد اعتباطي a). ويمكن التعامل مع هذه التغييرات الجبرية البسيطة بالطريقة الآتية.

بأخذ جميع قيم a إلى البداية في التعبير (7–14)، سنحصل على ما يلي نظرًا لوجود عدد n منها:

$$na + d + 2d + \cdots + (n - 1) d.$$

بأخذ d عاملًا مشتركًا من جميع الحدود اللاحقة، سنحصل على:

$$na + d\,(1 + 2 + \cdots + n - 1)\,.$$

الصيغة (7-13) تعطي مجموع أول عدد n من أعداد العد: وللحصول على مجموع أول عدد $(n-1)$ من الأعداد، علينا ببساطة أن نضع $(n-1)$ بدلًا من n فيكون المجموع:

$$na + d\left(\frac{1}{2}\,(n-1)\,n\right).$$

أي إن:

$$a + (a + d) + \cdots + a + (n-1)\,d = na + \frac{d}{2}n\,(n-1)\,.$$

يمكننا تطبيق هذا على أي متسلسلة حسابية نختارها. فمثلًا مجموع أول عدد n من الأعداد الصحيحة الفردية، وهي متسلسلة حسابية تكون فيها $a = 1$ والفرق بين أي حدَّين متتاليين هو $d = 2$، هو:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) &= n \times 1 + \frac{2}{2}n\,(n-1) \\ &= n + n\,(n-1) \\ &= n + n^2 - n = n^2, \end{aligned}$$

وهي نفس النتيجة التي رأيناها هندسيًّا في السؤال السادس في الفصل الأول.

هناك القليل لإضافته حول جمع المتسلسلة الحسابية، مع أنه تَجدُر الإشارة إلى عدم وجود قيود على الأعداد a أو d: فيمكن أن يكون موجبًا أو سالبًا أو صفرًا.

ثمة سؤال شائع في اختبارات الذكاء وهو أن تكتب الأعداد الثلاثة التالية في متتابعة مثل:

$$4, 7, 12, 19, 28, 39, 52, \ldots$$

الشيء المطلوب اكتشافه هو أن الفرق بين الحدود المتتالية يزيد بمقدار 2 في كل مرة، أي:

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$$

ومن ثَم فإن الإجابة ستكون 67 ثم 84 ثم 103. المتتابعة نفسها ليست متتابعة حسابية، لكن متتابعة الفروق تعتبر متتابعة حسابية.

وفي الواقع تعتبر متتابعة المربعات:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$$

هي أيضًا من نفس نوع متتابعة الفروق، كما رأينا من قبل مرتين، أي إنها متتابعة حسابية للأعداد الفردية.

هل يمكننا جمع أول عدد n من مربعات الأعداد؛ ومن ثم نستنتج الصيغة المعطاة في (2–7) مثلما نفعل في المتسلسلات الحسابية؟ ليس بشكل مباشر. نحتاج للعودة إلى مسألة جمع الأعداد الصحيحة مرة أخرى وحلها بطريقة أخرى.

لنأخذ المجموع الغريب التالي:

$$\left(1^2 - 0^2\right) + \left(2^2 - 1^2\right) + \left(3^2 - 2^2\right) + \cdots + \left(n^2 - (n-1)^2\right).$$

من السهل التبسيط؛ إذ يتقلص المجموع إلى حد واحد، نظرًا لأن كل قوة موجبة لها قوة سالبة تلغيها في القوس التالي، باستثناء n^2. ومن ثَم يمكن اختصار المجموع إلى n^2.

ومع ذلك، هناك شيء يمكننا تعلُّمه إذا ادَّعينا للحظة أننا لم نلاحظ هذا. فالحد القياسي في هذا المجموع هو:

$$(m+1)^2 - m^2 = m^2 + 2m + 1 - m^2 = 2m + 1,$$

حيث تتراوح m بين 0 و$n - 1$. ومن ثَم فإن هذا المجموع يمكن كتابته كما يلي:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1,$$

وقد أثبت البرهان السابق أنه يساوي n^2. هذه هي المرة الثالثة التي أثبتنا فيها هذه الحقيقة، على الرغم من أنك قد تظن هذا البرهان مصطنعًا للوهلة الأولى. ومع ذلك،

فسوف يثبت كونه أسلوبًا جديدًا ومفيدًا حيث يمكن تعميمه بطريقة لا تحدث مع البراهين الأخرى.

يجب أن نكون فضوليين بما يكفي للسؤال عما يحدث إذا أبدلنا الفرق بين مكعبين بالفرق بين مربعين، هل سنحصل على شيءٍ جديد؟ دعونا نُلقِ نظرة على:

$$\left(1^3-0^3\right)+\left(2^3-1^3\right)+\left(3^3-2^3\right)+\cdots+\left(n^3-(n-1)^3\right).$$

مرة أخرى، يتقلص المجموع إلى حد واحد، هذه المرة n^3. ويصبح الحد العام هو $(m+1)^3-m^3$. كما رأينا في الفصل الخامس، يمكن فك وتبسيط هذا:

$$(m+1)^3-m^3=m^3+3m^2+3m+1-m^3=3m^2+3m+1.$$

عند جمع الحد العام $3m^2+3m+1$ من $m=0$ إلى $m=n-1$ في الواقع نحصل على مجموع ثلاثة مجاميع، اثنان منها نعرفهما بالفعل، والثالث هو مجموع المربعات الذي نبحث عنه. ومن ثَم باستخدام بعض الجبر البسيط، يمكننا استنتاج تعبير لمجموع المربعات:

$$3\left(0^2+1^2+\cdots+(n-1)^2\right)+3\left(0+1+\cdots+n-1\right)$$
$$+\ (1+1+\cdots+1)=n^3.$$

والآن، مجموع عدد n من الواحد يساوي بالطبع n. ونحن نعرف أننا نستطيع إيجاد مجموع الأعداد الصحيحة من 0 حتى $n-1$ باستخدام $\frac{1}{2}n\left(n-1\right)$. ومن ثَم نحصل على:

$$3\left(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right)=n^3-n-\frac{3}{2}n\left(n-1\right). \qquad (7\text{–}15)$$

يتبقى فقط أن نبسط $n^3-n=n\left(n^2-1\right)$، وباستخدام تعبير الفرق بين مربعين الوارد في الفصل الخامس، يمكننا أن نكتب هذا على صورة $n\left(n-1\right)\left(n+1\right)$. ومن ثم يصبح الطرف الأيمن:

$$n\left(n-1\right)\left(n+1\right)-\frac{3}{2}n\left(n-1\right).$$

هذان الحدان بينهما عامل مشترك $n\,(n-1)$ سنقوم بإخراجه، فيصبح لدينا:

$$n\,(n-1)\left((n+1)-\frac{3}{2}\right)=n\,(n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right).$$

ولنكتب التعبير بشكل أسهل علينا أن نأخذ $\frac{1}{2}$ عاملًا مشتركًا من القوس الأخير. ولنفعل ذلك، نعتبر أن n تساوي $\frac{1}{2}2n$، بحيث يكون $n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,(2n-1)$. وننتهي عن طريق قسمة كلا الطرفين في المعادلة الناتجة على 3 لكي نعزل مجموع المربعات:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n\,(n-1)\,(2n-1)\,. \qquad (7\text{–}16)$$

هذا هو مجموع أول عدد $n-1$ من المربعات؛ أما إذا رغبنا في الحصول على مجموع أول عدد n من المربعات، فقم بوضع $n+1$ بدلًا من n في الصيغة (7–16) بالكامل، ثم بإعادة ترتيب الحدود الرئيسية في الناتج، سنحصل على:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1)\,. \qquad (7\text{–}17)$$

يمكننا الآن المُضي قُدمًا واستخدام هذه التقنية المكررة للحصول على مجموع أول عدد n من المكعبات، والقوى الرابعة، وفي العموم القوى من رتبة k: على سبيل المثال، في حالة المكعبات سيرتكز المجموع على $(m+1)^4-m^4$. وسيتضح:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2.$$

و

$$1^4+2^4+\cdots+n^4=\frac{n}{30}\,(n+1)\,(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right).$$

تعتبر صيغة مجموع الأعداد الصحيحة عبارة عن معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية في n، أما صيغة مجموع المربعات فهي معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة، وليس من الصعب الاقتناع (وأيضًا ليس من الصعب إثبات) بأن صيغة مجموع القوى من الرتبة k ستكون عبارة عن معادلة كثيرة الحدود في n بحيث تكون n^{k+1} هي أعلى قوة

فيها. وتصبح مسألة إيجاد مجموع قوى من رتبة k عبارة عن مسألة تعيين معاملاتٍ لهذه المعادلات الخاصة الكثيرة الحدود. وهذه المعاملات تُعطى بدلالة ما يسمى «أعداد برنولي»، التي تظهر عادة في المسائل من هذا النوع.

(٣) المتسلسلات الهندسية

تُعدُّ المتسلسلات الهندسية أهم فئة من المتسلسلات. وهي تظهر باستمرار في التطبيقات ولا سيما في دراسة الفائدة المركبة (بل إنها تتغلغل في معظم مبادئ الاقتصاد الأساسية) وكذلك في مواضيع مثل النمو السكاني.

وربما تكون أقدم مسألة من هذا النوع قد ظهرت في القصة الفارسية الأصل، على ما أعتقد، التي تحكي حكاية الرجل الذي اخترع لعبة الشِّطْرنج. كان الملك سعيدًا بوسيلة الترفيه الجديدة، فأمر مخترع اللعبة بأن يطلب مكافأته. فطلب المخترع، بتواضع مزعوم، حبة قمح واحدة للمربع الأول من رقعة الشطرنج، وحبتين للمربع الثاني، و4 حبات للمربع الثالث، و8 حبات للمربع الرابع ... وهكذا. فوافق الملك على طلب الرجل بسرور لكنه وجد أنه سيعطيه أكثر من الحبوب الموجودة في العالم، كما سنرى بعد قليل.

كما في حالة المتتابعات الحسابية، فالمتتابعة الهندسية تبدأ بحد اعتباطي مبدئي a، ولكن هذه المرة يكون الثابت هو نسبة كل حد إلى الحد التالي، وليس الفرق بينهما. هذه النسبة المشتركة يرمز لها بالرمز r. ومن ثَم فإن أول عدد n من الحدود في المتتابعة الهندسية القياسية يكون في صورة:

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}.$$

على سبيل المثال، إذا كانت $a = 1$ و$r = 2$ نحصل على المتتابعة الهندسية التي رأيناها سابقًا.

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^{n-1}, \ldots$$

إذا جمعنا المتتابعة الهندسية، حصلنا على المتسلسلة الهندسية:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}, \ldots \qquad (7\text{–}18)$$

يمكن إيجاد تعبير مغلق لـ (7-18)، ونعني بذلك تعبيرًا له عدد ثابت من الحدود بصرف النظر عن قيمة n، باستخدام حيلة تربط (7-18) بمجموع تقليصي معين. سوف نضرب المتسلسلة الهندسية بالمقدار $1-r$:

$$\left(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}\right)(1-r).$$

ثم نقوم بفك هذا باستخدام قانون التوزيع، فنحصل على:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$-ar - ar^2 - ar^3 - \cdots - ar^{n-1} - ar^n,$$

ومن ثم نجد أن الحدين الأول والأخير فقط هما من سيتبقيان بعد الحذف، فيصبح لدينا:

$$a - ar^n = a\left(1 - r^n\right).$$

بقسمة الطرفين على $1-r$ نحصل على:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1-r}. \qquad (7\text{–}19)$$

يمكننا الآن اختبار هذه الصيغة لمجموع قوى العدد 2، التي صادفناها في مسألتنا الأولى في الفصل الأول:

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1. \qquad (7\text{–}20)$$

يعتبر الطرف الأيسر متسلسلة هندسية حيث $a = 1$ و$r = 2$، وعدد الحدود في هذه المتسلسلة هو $n + 1$؛ ولذلك نحتاج لإجراء هذا التعديل عند تطبيق الصيغة (7-19):

$$\frac{1\left(1 - 2^{n+1}\right)}{1-2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1.$$

وهذا يحل أيضًا مسألة الحبوب على رقعة الشطرنج. وتحدد المكافأة بالمعادلة (7-20) حيث n تساوي 63؛ ومن ثم فإن الملك يفترض أن يعطي المخترع:

$$2^{64} - 1 \approx 1.84 \times 10^{19}.$$

حبة قمح! من الواضح أن الملك لم يكن يدرك سرعة تزايد المتسلسلة الهندسية. (وعلى الرغم من أن الملك بدا أحمق، فإننا على يقين من أنه كان سمحًا وأخذ الأمر بصدر رحب.)

بالعودة إلى الرياضيات، القصة استخدمت لتوضيح حقيقة أنه إذا كانت النسبة المشتركة r تزيد على 1، فإن المتسلسلة تنمو بلا قيود كلما زاد n. ولكن هذا لن يحدث إذا وقعت r بين -1 و1، لأنه لكل قيمة كبيرة من n، فإن الحد r^n بدلًا من أن يزيد على الحدود السابقة كما كان سيحدث إذا كانت r كبيرة، فإنه ينكمش نحو 0. في هذه الحالة فإن مجموع المتسلسلة يقترب من قيمة نهائية كلما زاد n، ولأن الحد r^n لا يفيد في هذه القيمة فإننا نجد أن:

$$a + ar + ar^2 + \cdots = \frac{a}{1-r} \quad \text{if } -1 < r < 1. \qquad (7\text{–}21)$$

هذا يسمح لنا أن نتحقق من المتسلسلة غير المنتهية التي ظهرت في مسألة الساعة في الفصل الأول. في ذلك المثال $a = 1$ و$r = \frac{1}{12}$ أي إن:

$$1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{1}{\left(\frac{11}{12}\right)} = \frac{12}{11}.$$

وبالمثل يمكن للقارئ التحقق من أن: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$.

ولكننا دخلنا بالفعل إلى عالم المتسلسلات غير المنتهية.

(٤) المتسلسلات غير المنتهية

المتسلسلات غير المنتهية تكون أسهل في التعامل معها من المتسلسلات المنتهية، فمثلًا في حالة المتسلسلة الهندسية غير المنتهية:

$$L = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

إذا علمنا أن هذه المتسلسلة لها القيمة النهائية L، فإننا نستطيع بسهولة التعبير عن هذه القيمة بدلالة a وr بسهولة. فقط نلاحظ أن:

$$L = a + r\left(a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\right) = a + rL.$$

بحل المعادلة $L = a + rL$ يصبح لدينا:

$$L - rL = a \implies L(1 - r) = a$$

$$\implies L = \frac{a}{1 - r},$$

وهي نفس النتيجة التي أوجدناها في الجزء السابق؛ حيث اختبرنا بعناية ما يحدث عندما تحولنا من المتسلسلة المنتهية إلى المتسلسلة غير المنتهية. كما رأينا هناك، تتقارب المتسلسلة الهندسية غير المنتهية بشرط أن تقع النسبة المشتركة r بين -1 و1، لأن هذا يضمن أن الحد r^n يقترب من 0 كلما زاد n. على سبيل المثال، تعتبر المتسلسلة المعطاة في (4-7):

$$4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \cdots$$

هي متسلسلة هندسية حيث $a = 4$ و$r = -\frac{1}{3}$؛ ومن ثَم يكون مجموعها:

$$\frac{a}{1 - r} = \frac{4}{1 + \frac{1}{3}} = 4 \times \frac{3}{4} = 3.$$

وهذه أيضًا فرصة لإعادة النظر في مسألة لعبة الروليت الروسية (السؤال الرابع في الفصل السادس). تذكر أن هناك فرصةً واحدة من ست طلقات تطلق على كل لاعب في دوره. احتمال أن تكون الطلقتان فارغتَين لكلا اللاعبين في أي جولة معينة هو:

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

ومن ثم يكون احتمال أن يفوز اللاعب A في طلقته التي ترتيبها $n + 1$ وذلك بعد عدد n من الجولات غير الناجحة هو:

$$\frac{1}{6} \times \left(\frac{25}{36}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

الاحتمال p أن يفوز اللاعب A هو مجموع هذه الاحتمالات الفردية على جميع قيم n الممكنة:

$$p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{25}{36} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \cdots$$

وهذه متسلسلة هندسية غير منتهية حيث الحد الأول $a = \frac{1}{6}$ و$r = \frac{25}{36}$. ومنها نحصل على:

$$p = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{6} \div \left(1 - \frac{25}{36}\right) = \frac{1}{6} \div \frac{11}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{36}{11} = \frac{6}{11},$$

مما يؤكد الحل الذي وصلنا إليه في الفصل السابق. هذا النهج يتطلب المزيد من العمل، ولكنه يكشف عن بعض المعلومات الإضافية.

لنلقِ نظرة على بعض المتسلسلات غير المنتهية غير الهندسية. كما ذكرنا من قبل، المتسلسلة التوافقية — مجموع معكوسات الأعداد الصحيحة الموجبة — تتباعد، أي إن:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

تتزايد متجاوزة كل الحدود (على الرغم من أن ذلك يتم ببطء شديد). حدود المتسلسلة صغيرة، ولكنها ليست في صغر حدود المتسلسلة في المثال السابق، وهذا يجعلها تسلك سلوكًا مختلفًا تمامًا. في الواقع من السهل إثبات أن المتسلسلة التوافقية تتباعد. وينطوي البرهان القياسي على تجميع الحدود ثم المقارنة:

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&\quad > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&\quad = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots
\end{aligned}$$

السبب في أننا نضع الحدود في الأقواس بهذه الطريقة هو خلق مجموعات من الحدود مجموعها يزيد على $\frac{1}{2}$؛ ومن ثَم فإن مجموع المتسلسلة يتزايد متجاوزًا كل الحدود. صحيحٌ أننا نحتاج إلى مضاعفة عدد الحدود التي نأخذها في كل مجموعة للمرور إلى المجموعة

التالية، إلا أن هذا لا يشكل أي صعوبة لأن المتسلسلة غير منتهية. ومن ثم فإن المجموع ليس له قيمة نهائية.

من المدهش أن توجد صيغة بسيطة تسمح لنا بحساب مجموع أي عدد من الحدود من المتسلسلة التوافقية بدرجة كبيرة من الدقة:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\approx\frac{1}{2n}+\ln n+\gamma. \qquad (7\text{-}22)$$

مرة أخرى التعبير $\ln n$ يعني لوغاريتم n بالنسبة للأساس e، ولكن ما العدد الغامضγ؟ للأسف ليس هناك من يعرف الكثير عنه. هذا العدد يسمى ثابت أويلر-ماسكيروني وهو موجود مؤكدًا؛ وهذا يعني أن التقريب في (7-22) يصبح أكثر دقة كلما زادت قيمة n. ويمكن حساب الثابت γ نفسه لأي عدد من الأماكن العشرية: فمثلًا لأربعة أماكن عشرية يساوي 0.65772؛ لذلك:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}\approx\frac{1}{200}+\ln 100+\gamma=5.187.$$

ومع ذلك، حتى السؤال الأساسي عما إذا كان العدد γ عددًا نسبيًّا أم لا لم يُجَب عنه بعد. فخلافًا للثوابت الطبيعية الأخرى مثل e وπ، فإن العدد γ لا يظهر في مكان آخر في الرياضيات، مما يجعل من الصعب استيعاب كل ما يتعلق به. غالبًا ما تستخلص النتائج الرياضية الجديدة من القدرة على النظر إلى شيء واحد بطريقتين مختلفتين؛ إذ إن الرؤية المزدوجة من زاويتين كثيرًا ما تكون كاشفة. ولا نزال نفتقر إلى زاوية أخرى كاشفة نستطيع من خلالها معرفة γ.

يمكننا اعتبار ما نعرفه عن تباعد المتسلسلة التوافقية تطبيقًا آخر لما توصلنا إليه في موضوع الكسور المصرية في الفصل الخامس. تذكر أننا وجدنا أن أيَّ عددٍ نسبي حقيقي $\frac{m}{n}$ يمكن كتابته على صورة مجموع معكوسات أعداد موجبة مختلفة. يمكننا الآن إزالة الشرط أن $m<n$.

لنعتبر $k\geq n$ أي إن $\frac{k}{n}$ كسر غير حقيقي ويمكننا كتابته كعدد مركب $a+\frac{m}{n}$، حيث a عدد صحيح موجب و$\frac{m}{n}$ كسر حقيقي. وباستخدام الطريقة التي استخدمناها في الفصل الخامس، يمكننا كتابة $\frac{m}{n}$ كمجموع عدد m أو أقل من معكوسات أعداد موجبة مختلفة.

على سبيل المثال، لنفترض أن العدد هو $2 + \frac{2}{7} = \frac{16}{7}$ أي إن $a = 2$ و$m = 2$ و$n = 7$. ستعطينا طريقتنا:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}.$$

بعد ذلك، نركز على العدد a. لنأخذ المتسلسلة التوافقية ونحذف المعكوسات المستخدمة في $\frac{m}{n}$. المتسلسلة الباقية لا تزال تتباعد إلى اللانهائية؛ إذ إن حذف عدد محدد من الحدود لا يغير طبيعتها التباعدية. وقد يحدث أن تُتجاوَز قيمة a المعطاة عند جمع عدد كافٍ من حدود المتسلسلة: ولنركز على حدود المتسلسلة التي تجعلنا نتجاوز هدفنا a.

في مثالنا $a = 2$. ومع الوضع في الاعتبار أننا ممنوعون من استخدام الكسرين $\frac{1}{4}$ و$\frac{1}{28}$ مرة أخرى، سوف نسقطهم من المتسلسلة ونبدأ الجمع. فنجد أن:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1\frac{5}{6} < 2 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 2\frac{1}{30}.$$

ومن ثم نجد أن:

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

لو كان الكسر $\frac{1}{6}$ ليس كسر وحدة، لاستخدمنا الطريقة التي ذكرناها في الفصل الخامس لكتابته كمجموع كسور وحدة متمايزة. إلا أن مثالنا قد اكتمل، لأننا بجمع تحليلنا للعدد 2 مع تحليل $\frac{1}{4}$، سوف نصل إلى:

$$\frac{16}{7} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{28}.$$

وهكذا يكون هناك ثلاث مراحل في عملية التحليل: أولًا تحليل $\frac{m}{n}$، ثانيًا تحليل أكبر جزء ممكن من a مع الوضع في الاعتبار عدم تَكرار كسور الوحدة؛ وأخيرًا تحليل الكسر الحقيقي المتبقي من a. ودائمًا نتأكد من أن هذه المرحلة الأخيرة لا تنطوي على استخدام أي كسر وحدة تم استخدامه في المرحلتين الأوليين، وذلك باستخدام الحدود من المتسلسلة التوافقية التي تكون بعيدة بقدرٍ كافٍ على طول المتسلسلة. على سبيل المثال، إذا ظهر كسر الوحدة $\frac{1}{28}$ مرة أخرى في المرحلة النهائية، فيمكننا من حيث المبدأ، تحليل a مرة أخرى

باستخدام كسور الوحدة التي يزيد مقامها عن 28. إن حقيقة أن المتسلسلة التوافقية تتباعد إلى اللانهائية تسمح لنا بأن نبدأ على أي بعد على طول المتسلسلة قدر ما نحتاج. وربما يكون عدد الحدود المطلوب في التحليل كبيرًا جدًّا، ولكننا دائمًا سنتمكن من إيجاد التحليل المناسب.

نعود مرة أخرى، كما وعدنا، إلى مجموع معكوسات مربعات الأعداد. على العكس من المتسلسلة التوافقية، سوف نثبت أن المتسلسلة (7-7) تتقارب إلى قيمة نهائية معينة.

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

علينا أولًا أن نعالج المتسلسلة في (7-8):

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{n\,(n+1)}+\cdots$$

السبب في أن هذه المتسلسلة أكثر قابلية للمعالجة هو أن الحد العام $\frac{1}{n(n+1)}$ يمكن كتابته على الصورة $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$، وهذه حقيقة يمكن التأكد منها بالجمع باستخدام المقام المشترك:

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)-n}{n\,(n+1)}=\frac{1}{n\,(n+1)}.$$

هذا يسمح لنا بكتابة المتسلسلة في صورة:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

فإذا أخذنا مجموع أول عدد n من الحدود بين الأقواس في هذه المتسلسلة، فإن كل الحدود سوف تحذف ما عدا الحد الأول 1 والحد الأخير $-\frac{1}{n+1}$؛ فمثلًا مجموع أول أربعة حدود هو $1-\frac{1}{5}$. بعبارة أخرى، مجموع أول عدد n من حدود هذه المتسلسلة هو:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\,(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

ونستنتج أن هذه متسلسلة تتقارب من قيمة معينة: إذ يتزايد المجموع كلما أخذنا عددًا أكبر من الحدود لكنه لا يزيد أبدًا على 1. في الحقيقة، نظرًا لأن $\frac{1}{n+1}$ يتقارب من الصفر كلما زادت n، إذن فالقيمة النهائية لهذه المجاميع، وهو ما نعنيه بمجموع المتسلسلة غير المنتهية، موجودة وتساوي 1.

يمكننا الآن أن نثبت أن المتسلسلة الأصلية لمجموع معكوسات مربعات الأعداد تتقارب باستخدام حجة المقارنة. بمقارنة المتسلسلتين:

$$\frac{1}{2\times 2}+\frac{1}{3\times 3}+\frac{1}{4\times 4}+\frac{1}{5\times 5}\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

و

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{n\,(n+1)}+\cdots$$

فإذا قارنا المقامات للحدود المتناظرة في كلٍّ من هاتين المتسلسلتين، نجد أن كل مقام في المتسلسلة الأولى أكبر من نظيره في المتسلسلة الثانية. وهذا يعني أن كل حد في المتسلسلة الأولى أصغر فعليًّا من نظيره في المتسلسلة الثانية. ومن ثَم إذا جمعنا أول عدد n من الحدود في المتسلسلة الأولى فإن المجموع سيكون أصغر من مجموع أول عدد n من الحدود في المتسلسلة الثانية. وقد رأينا توًّا أن مجموع أول عدد n من الحدود في المتسلسلة الثانية يكون دائمًا أقل من 1. ومن ثم فإن المتسلسلة الأولى ستتقارب دائمًا لقيمة نهائية معينة أقل من 1، وهي القيمة النهائية للمتسلسلة الثانية. ونستنتج من ذلك أن مجموع معكوسات مربعات الأعداد يتقارب بالفعل لقيمة نهائية وأن:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots<2.$$

أخشى أننا لسنا في وضع يتيح لنا اقتراح القيمة النهائية السحرية $\frac{\pi^2}{6}$، ولكن المتسلسلة لها خاصية رائعة أخرى: عدد الحدود المطلوب جمعها للوصول إلى نطاق $\frac{1}{n}$ من القيمة النهائية هو n بالضبط. فمثلًا، مجموع الحدود العشرة الأولى يدخل ضمن نطاق 0.1 من القيمة النهائية ولكن مجموع أول تسعة حدود لا يحقق ذلك. ومن الغريب أنه يمكن إثبات ذلك دون معرفة القيمة النهائية باستخدام تقنيات أكثر قليلًا مما سبق ذكره.

(٥) الفائدة المركبة وحاصل الضرب الطويل جدًّا

إذا كان من الممكن وجود مجموع غير منتهٍ، فلماذا لا يمكن وجود حاصل ضرب غير منتهٍ؟ يوجد بعض حواصل الضرب غير المنتهية المقبولة التي تحتوي على العدد π. ربما

أفضلها جميعًا هو الصيغة التي وضعها جون واليس في القرن السابع عشر:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

مثلما نتمكن من تقييم المجاميع المنتهية فحسب، فإننا نستطيع تقييم حواصل الضرب المنتهية فحسب أيضًا. وحينما نقول إن حاصل الضرب غير المنتهي هذا يساوي $\frac{\pi}{4}$ فهذا يعني أننا كلما أوجدنا قيمة حاصل ضرب أطول وأطول من هذا التعبير، حصلنا على الإجابة التي ستقترب دائمًا من $\frac{\pi}{4}$ وتدخل في النهاية داخل نطاق محدد من هذه القيمة النهائية. تذكر أننا لاحظنا أن المجموع غير المنتهي ليكون لديه فرصة التقارب من قيمة نهائية، فإن كل الحدود يجب أن تكون قريبة من 0. وبالمثل، فحاصل الضرب غير المنتهي حتى يتقارب من قيمة نهائية، يجب أن تكون كل الحدود قريبة من 1. وهذا هو الحال مع حاصل ضرب واليس: فإذا نظرنا إلى أي زوج من الحدود لهما نفس البسط، فسنجد أنهما على صورة:

$$\frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1} = \frac{4m^2}{4m^2-1}.$$

بحيث يكون حاصل ضرب مثل هذا الزوج أكبر قليلًا من 1. (فمثلًا عند $m = 5$ فإن المضروب فيه يكون $\frac{100}{99}$.)

يأتي حاصل ضرب واليس من بعض الحيل الرياضية التي تنطوي على المساحات تحت منحنيات قوى الدوال المثلثية. وقد اكتشف حاصل ضرب غير منتهٍ آخر يحتوي على π في القرن السادس عشر على يد فييته. وهو يأتي من تقريب الدوائر بالمضلعات، كما قد تظن من الصيغة التي يتخذها:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right)} \cdots$$

هذه الزخارف الرياضية الجميلة قد تبدو لحد ما غير مهمة. والحالة الأكثر بساطة تؤدي إلى سؤال كلاسيكي عن السلوك المقيد لحواصل الضرب. وهذه هي مسألة الفائدة المركبة لبرنولي.

لنفترض أنك تستثمر وحدة واحدة (الوحدة قد تكون جنيهًا أو دولارًا أو ألف جنيه أو ألف دولار) في نظام يدفع لك فائدة نسبتها 100% سنويًّا. (معدل الفائدة الفعلي لن يُحدث فارقًا يذكر في طبيعة المسألة؛ وقد اخترت هذه القيمة الكبيرة جدًّا لتسهيل الحسابات فحسب.) بعد عام واحد سيكون لديك وحدتان. ومع ذلك، كنت ستستفيد أكثر إذا استثمرت في نظام يدفع لك 50% مرتين في السنة؛ لأنك كنت ستأخذ فائدة على الفائدة التي أخذتها في النصف الأول من السنة؛ فكل ستة أشهر سيصبح رأس مالك $1\frac{1}{2}$ مرة من رأس المال السابق، أو بعبارة أخرى، في نهاية العام سيصبح حسابك:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25 \text{ units},$$

أي إن نسبة الفائدة الفعلية ستكون 125%. ومع ذلك، سيكون النظام الذي يدفع فائدة شهرية أفضل؛ إذ إن مدخراتك سوف تضرب في $1\frac{1}{12}$ كل شهر؛ ومن ثَم ستصبح:

$$\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2.613 \text{ units},$$

أي نسبة فائدة سنوية تساوي 161.3%.

كلما قَصرَت فترة الانتظار لدفع الفائدة التالية كان ذلك أفضل للمستثمر؛ ومن ثم إذا كان حسابك يعطي فائدةً يوميةً متراكمة، فسيكون ذلك أفضل وهكذا ... وفي الواقع، يمكن أن يدفع البنك فائدة كل ساعة أو حتى كل ثانية. ولماذا لا تأخذ الأمر إلى نهايته وتقدم حسابًا يعطي فائدة متواصلة. هل هذا ممكن؟ هل سيفلس البنك على الفور لأنه سيدان بمبلغ لا نهائي من المال؟

الإجابة هي لا؛ فهذا يمكن تنفيذه؛ لأن قيمة حساب العميل ستكون دائمًا محدودة مهما صغرت الفترة بين مرات دفع الفوائد.

الحالة العامة هي: سيدفع لك البنك عدد n من المرات كل سنة، وفي كل مرة فإن حسابك سوف يضرب في المعامل $1 + \frac{1}{n}$؛ ومن ثَم في نهاية العام سيكون عدد الوحدات التي تملكها هو:

$$P = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

ونرى أنه كلما كبر n فإن P سيكون أكبر. ومع ذلك، فمهما زادت قيمة n، فإن قيمة P ستكون دائمًا أقل من 3. لإثبات ذلك بالتفصيل — ولن نقوم بهذا هنا — يمكنك فك

حاصل الضرب P مستخدمًا نظرية ذات الحدين (الفصل الرابع) وملاحظة أن حدود المفكوك كل منها أصغر من مثيلاتها من حدود متسلسلة هندسية معينة لها المجموع 3. وببذل القليل من الجهد الإضافي ستكتشف أن قيمة P النهائية مهما كبرت n ستساوي $e = 2.71828\ldots$، وهو أساس نظام اللوغاريتمات الطبيعية.

الفصل الثامن

الاحتمال وألعاب الاحتمال

(١) أعياد الميلاد والفائزون المحظوظون المُدهِشون

إذا عادت ابنتك الصغيرة من المدرسة تقول إن طفلَين في الفصل لهما يوم الميلاد نفسه، وتسأل «أليس هذا مُدهِشًا؟» فإن الإجابة الرياضية الصحيحة عن سؤالها هي: «نعم، ليس هذا مُدهِشًا، بل هو أمرٌ متوقَّع بين الحين والآخر.» وعلى الرغم من أن هذه ليست الإجابة التي يمكن أن يُنصَح بها الآباء، فسيكون من الطريف أن نعرف سبب صحة هذه الإجابة؛ لأن الإجابة الصحيحة مُدهِشة.

إذا كان لدينا شخصان، فما احتمالات أنهما مولودان في نفس اليوم من الأسبوع؟ الإجابة هي $\frac{1}{7}$؛ يختار الشخص الأول يومًا معينًا (يوم مولده)؛ ومن ثَم يوجد احتمالٌ واحد من سبعة أن يختار الشخص الثاني اليوم نفسه من أيام الأسبوع. ثَمة طريقةٌ أخرى للنظر في الموضوع، وهي أن احتمال أن يكونا مولودَين في يومين مختلفين من أيام الأسبوع هو $\frac{6}{7} = 1 - \frac{1}{7}$.

لنفترض الآن أن لدينا ثلاثة أشخاص، ما احتمالات أن يكونوا مولودين في أيام مختلفة من الأسبوع؟ هذا النوع من المسائل يشبه مسألة اليانصيب الوطني التي تناولناها في الفصل السادس. بالمنطق نفسه الذي ذكرناه هناك، ستكون الإجابة كما يلي:

$$\frac{6}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{30}{49} \approx 0.61.$$

لإيجاد احتمال أن يكون أربعة أشخاص مولودين في أيام مختلفة من الأسبوع، علينا أن نضرب هذا الرقم في $\frac{4}{7}$ فنحصل على 0.35 بالتقريب.

عكس أن تكون أيام الميلاد جميعها مختلفة، هو أن يكون اثنان، أو ربما أكثر، لهما يوم الميلاد نفسه. عند طرح الاحتمالات السابقة من 1، سنرى أن احتمال أن يكون شخصان، أو أكثر، لهما يوم الميلاد نفسه هو 0.39 عندما يكون لدينا ثلاثة أشخاص، و0.65 عندما يكون لدينا أربعة. ولا يمكننا أن نتوقع احتمالًا أفضل من 50–50 لحدوث مثل هذه المصادفة إلا إذا كان لدينا أربعة أشخاص على الأقل. ونظرًا لأن 4 هي أقل عدد يزيد على نصف 7، فيمكنك القول إنك كنت تستطيع توقُّع الإجابة. لاحظْ أننا إذا كان لدينا 8 أشخاص، فإن احتمال أن يوجد تطابقٌ واحد على الأقل سيكون 1؛ إذ إنه احتمالٌ مؤكَّد لا يمكن تحاشيه؛ لأن هناك أشخاصًا أكثر من أيام الأسبوع. وهذا مثال آخر على مبدأ برج الحمام، الذي قدَّمناه في الفصل السادس.

قد يبدو هذا غير مهم إلى حدٍّ بعيد، لكنه يُسهِم في شرح الطريقة التي بها يمكننا إجابة السؤال الأصلي «أليس هذا مدهشًا؟» ما مدى احتمال أن يتشارك طفلان أو أكثر في فصل به 30 طفلًا في يوم الميلاد نفسه؟ ربما تقترح الحسابات السابقة التي تخصُّ أيام الأسبوع أن الإجابة هي أنه «احتمال ضئيل للغاية»؛ لأننا إذا كنا سنستخدمها فهي ربما تدفعنا لاستنتاج أننا نحتاج إلى مجموعة مكوَّنة من عدد طلاب يساوي على الأقل نِصف عدد أيام السنة؛ أي أن يحتويَ الفصلُ على 183 طالبًا على الأقل لكي يصبح لدينا احتمال راجح أن تحدث المصادفة ويتطابق عيدا ميلاد طالبَين. غير أن هذا مجرد تخمين، وعلى الرغم من أن هذا نفس نوع المسألة فالأرقام مختلفة؛ ومن ثَم فنحن بهذا الشكل نقفز إلى النتائج. بتجاهل التعقيد البسيط الخاص بالسنوات الكبيسة، فإن احتمال أن يكون الـ 30 طفلًا لهم 30 يومَ ميلاد مختلفًا هو حاصل ضرب الـ 29 كسرًا التالية:

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \cdots \times \frac{337}{365} \times \frac{336}{365}.$$

هذا العدد صغير جدًّا، أقل من 0.3؛ أي إن احتمال أن يشترك اثنان أو أكثر من الأطفال في يوم الميلاد نفسه أكبر من 7 من 10. بل إنه حتى في الفصل المكوَّن من 23 طفلًا فحسب، يكون احتمال أن يشترك اثنان أو أكثر في يوم الميلاد أفضل من 50–50. وسيظل هذا دائمًا مفاجئًا للناس، ويرجع السبب في اندهاش الناس مما يظنونه مصادفةً مذهِلة في أغلب الأحيان إلى عدم تقديرهم أن احتمالات «اتفاق أعياد الميلاد» هذه تختلف تمامًا عما قد يظنونه للوهلة الأولى.

صحيح أنني افترضت أن احتمالات أن تقع أعياد الميلاد في أي يومٍ من السنة متساوية. وأنا أتوقع أن هذه الفرضية سليمة إلى حدٍّ بعيد، رغم أن مستشفيات الولادة التي تحتفظ بأرقام تخصُّ أكثر الأوقات ازدحامًا بالمواليد قد تعرف أكثر مني. ومع ذلك فإلغاء فرضية التوزيع المنتظم للمواليد على أيام السنة لن يُضعِف الحُجة؛ لأن هذا سيؤدي إلى زيادة احتمال اتفاق أعياد الميلاد. لنأخذْ مثالًا خياليًّا جدًّا؛ لنفترضْ أننا سألنا السؤال نفسه في مجتمع حيث الرجال والنساء مضطرون إلى عيش حياة منفصلة تمامًا بعضهم عن بعض باستثناء شهر واحد من العام، فليكن يوليو مثلًا؛ ومن ثَم فإن حمل النساء في أطفال لن يتم إلا في هذا الشهر؛ ومن ثَم فإن جميع الأطفال سيُولَدون بعد تسعة أشهُر — أي في شهر أبريل. في هذه الحالة سيكون شِبه مؤكَّد أنه في مجموعة من ثلاثين فردًا سيتقاسم اثنان أو أكثر عيد الميلاد نفسه (في أبريل).

كثيرًا ما نسمع عن قصص فيها شخصٌ ما محظوظ بدرجة لا تُصدَّق، واستبعاد وقوع حدث معيَّن بتأكيد أن نِسبته واحد في المليون. مع ملايين الفرص التي تُنتهز يوميًّا، فإن من الصحيح أن أحداثًا متطرِّفة وغير عاديةٍ أو محتمَلةٍ تحدُث بالصدفة. على الرغم من ذلك، ففي بعض الأحيان تكون هذه الأحداث، التي تبدو غير محتمَلة، غيرَ مستبعَدة بشكل خاص على الإطلاق. وربما يرجع هذا التناقض الواضح إلى عدم التمييز بين حدوث الحدث غير المحتمل لأي شخص وبين حدوثه لشخص بعينه. على سبيل المثال، ليس هناك ما يدهش بشأن فوز أحدهم باليانصيب، الأمر المدهِش حقيقةً هو أن يفوز شخص معيَّن محدَّد مسبَّقًا باليانصيب؛ أنت مثلًا. عدم إدراك هذه النقطة في حالات أكثر تعقيدًا يمكن أن يؤديَ إلى نتائج محيِّرة للغاية.

مثلًا، لنفترضْ أنك تعمل في شركة عملاقة تكافئ العاملين بها، وعددهم 100 ألف شهريًّا، من خلال يانصيب يفوز فيه 100 منهم بعُطلة مجانية. يختار الكمبيوتر اسمًا عشوائيًّا من قائمة المرتَّبات، ثم يعود للقائمة ويختار اسمًا آخر، وهكذا مائة مرة. من المفهوم أنه قد يحدُث ويقع الاختيار على اسمك مرتين، ولكن ما احتمالات أن يحدُث هذا؟ حسنًا، احتمال أن يقع عليك الاختيار من الأساس لا يزيد على 1 في 1000؛ ومن ثَم فإن احتمال أن يقع عليك الاختيار مرتين في الشهر نفسه لا بد أن يكون واحدًا في المليون تقريبًا. هذا المنطق صحيح؛ ومن ثَم فإنك تندهش عندما تقرأ في المجلة الشهرية للشركة عن هاري المحظوظ الذي فاز بعُطلتَين في سحب هذا الشهر، وليس عطلة واحدة فحسب! إنه احتمال واحد في المليون! هذا حدث سيئ للغاية، ولكن الأسوأ أنك بعد سنة من ذلك

اليوم عندما كنت تقرأ في المجلة الشهرية للشركة، وجدت شخصًا آخر يفوز بعطلتين في السحب نفسه، سالي الذكية، وما أثار غيظَك أكثر مشاهدتُك لصورة هاري يهنئ سالي على حظها السعيد، ثم مشاهدة قائمة الفائزين في هذا الشهر، وهي لا تشمل اسمك بطبيعة الحال. فتشعر أن احتمالات عدم حدوث كل هذا لا بدَّ أن تكون فلكية، وتنصرف مُتمتِمًا بأن كل هذا حدث بترتيبٍ مسبَّق.

صحيح أن حظ هاري وسالي مُدهِش قليلًا، لكن قليلًا فقط. عليك أن تسأل نفسك: ما احتمال أن يسحب الكمبيوتر 100 اسم مختلف من القائمة؟ هذا يعود بنا إلى مسألة أعياد الميلاد مرةً أخرى، هذه المرة مع 100,000 يوم ميلاد و100 طالب؛ لاختيار 100 من 100,000 متاحة، في حين أنه في مسألة أعياد الميلاد الأصلية، كان الطلاب يختارون 30 اختيارًا عشوائيًّا من 365 اختيارًا متاحًا هو عدد أيام السنة. وقد تبيَّن أن الاحتمال يساوي تقريبًا $\frac{19}{20}$، وهو احتمال بالرغم من ارتفاعه، يترك احتمالًا واحدًا في العشرين أن يفوز شخص أو أكثر، فوزًا متكررًا. هذا يعني أن هاري أو سالي يمكن أن يتوقَّع حدوث هذا، في المتوسط، مرةً كل 20 شهرًا؛ أما أن يقع هذان الحدثان في غضون 12 شهرًا بدلًا من الـ 20 شهرًا المتوقَّعة، فهذا شيء غير مرجَّح، ولكن ليس أكثر من ذلك.

ماذا عن حقيقة أنك لا تفوز أبدًا في هذا اليانصيب؟ بالطبع يمكن ألا تفوز؛ فهناك احتمال واحد في الألف فقط أن تفوز.

إذا كان هذا النوع من الأمور يُحبِطك حقًّا، فمن الأفضل التوقف عن قراءة هذه المجلة. أما إذا لم يكن كذلك، فسوف تُعذَّب طَوال حياتك بقصص «سعداء الحظ المدهشين»؛ ففي شهر تفوز أختان توءمان، وفي الشهر التالي يفوز شخصٌ ما للمرة الثالثة بالعطلة خلال السنة. بما أن هناك 100 فائز محظوظ كل شهر، فمن المحتمَل أن يكون واحد أو اثنان منهم محظوظَين بشكل خاص لدرجة تثير الغضب. عليك أن تُقنِع نفسك بحقيقة أن هذا ربما لن يحدث لك أبدًا.

(٢) مسألة صامويل بيبس

كان صامويل بيبس — كاتب اليوميات الشهير — مُقامِرًا عتيدًا، وذات يوم طُرح على إسحاق نيوتن المسألةُ العملية الآتية في القِمار. في لعبة نرد، أحد الرجال لديه ستة أحجار نرد، ومطلوب منه أن يُحرِز الآس مرةً واحدة على الأقل (بمعنى أن يظهر الوجه الذي به

1 من حجر النرد)؛ بينما الثاني لديه اثنا عشر نردًا، ومطلوب منه أن يُحرِز الآس مرتين أو أكثر. فأيٌّ من اللاعبَين لديه فرصة أعلى في الفوز؟

لديَّ انطباع بأن نيوتن فكَّر في أن المسألة نوعًا ما أقلُّ من مستواه، لكنه مع ذلك أعطى بيبس إجابته. لعلك تشكُّ بوجود تماثُل كافٍ في اللعبة لتكون عادلة، بحيث لا يَملِك أيٌّ من اللاعبَين فرصةً أعلى في الفوز، ولكن خبرة بيبس قادته لأن يظن غير ذلك، وإذا كان الأمر كذلك فقد كان على حق. أحد اللاعبَين يتمتع بفرصةٍ أعلى في الفوز، وإن كانت فرصةً بسيطة، ولكنها مؤكدة. فلنعرف معًا؛ أيهما؟

ما احتمال فشل اللاعب الأول؟ سوف يفشل إذا كان كل نرد معه يظهر عليه رقم غير 1. واحتمال أن يظهر على أي حجر نرد أيُّ رقم بخلاف 1 يساوي $\frac{5}{6}$. وبما أن كل حجر يسلك سلوكًا مستقلًّا عن الأحجار الأخرى، فإن نسبة المرات التي تُظهر فيها جميع الأحجار الستة أرقامًا بخلاف 1 تساوي $0.335 \approx \left(\frac{5}{6}\right)^6$. ومن ثَم فإن احتمال نجاح اللاعب الأول، أي نجاحه في إلقاء حجر نرد واحد على الأقل يُظهر الرقم 1، هو الاحتمال المُكمل لهذا:

$$1 - 0.335 = 0.665.$$

ماذا عن اللاعب الثاني؟ هذه الحالة أكثر تعقيدًا بقليل. اللاعب الثاني قد يفشل بطريقة من اثنتين. الأولى ألَّا يرمي 1 على الإطلاق، والثانية أن يرمي 1 مرةً واحدة. وبما أن لديه 12 حجر نرد، ستكون احتمالية ألَّا يُلقي 1 على الإطلاق هي $\left(\frac{5}{6}\right)^{12}$. والمطلوب الآن احتمال أن يرمي 1 مرةً واحدة. احتمال أن الحجر الأول يُظهر 1 (لأنه لا ضرر من تخيُّل أنه سوف يرمي كل نرد على حدة حتى لو كان سيُلقيها معًا في نفس الوقت) والأحجار الأخرى تُظهر أرقامًا أخرى هي:

$$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6},$$

حيث إن هناك 12 كسرًا إجمالًا تقابل 12 نردًا. بالمثل، احتمال أن النرد الثاني يُظهر 1 والباقي لا يفعل يساوي:

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6}.$$

مرة أخرى يوجد 12 عاملًا، وكلها نفس العوامل بالفعل، فيما عدا أن ترتيب كتابتها يختلف؛ ومن ثَم فإن الإجابة ستكون واحدة. نظرًا لأنه توجد 12 إمكانية تقابل الـ 12 مكانًا في ترتيب النرد حيث يمكن أن يظهر 1، فإننا نجد أن احتمال أن يظهر 1 مرةً واحدة يساوي:

$$12 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{11}.$$

إذَن، لإيجاد احتمال نجاح اللاعب الثاني، يجب طرح احتمالَي الفشل بالطريقتين من 1. فنحصل على:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0.619.$$

وبذلك نكون قد أجَبْنا عن سؤال صامويل بيبس؛ فاللاعب الأول لديه فرصة أكبر في النجاح بنسبة 5%، مقارنةً باللاعب الذي لديه 12 نردًا.

(٣) مسائل العد والانتخابات والانعكاس

على المستوى الأبسط، تنطوي أسئلة الاحتمال على عدد محدود من النتائج المحتملة المرجحة بالقدر نفسه، ونسأل ما احتمال حدوث حدث ملائم معيَّن. بصفة عامة، النسبة المطلوبة تساوي:

$$\text{الاحتمال } (p) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{العدد الإجمالي للحالات}}.$$

ونرى على الفور أن p تقع دائمًا بين 0 و1، بحيث تكون القيمة المتطرِّفة 0 مناظِرةً للحدث المستحيل، بينما إذا كانت جميع الحالات ملائمة؛ ومن ثَم فالنجاح مضمون، إذَن فقيمة p في هذه الحالة سوف تساوي 1.

غالبًا ما يُعبَّر عن الاحتمالات كنِسبٍ مئوية؛ فاحتمال 50% يعني بطبيعة الحال احتمال $\frac{1}{2}$. عدم الدقة الشائعة في لغة الاحتمالات تحدُث أحيانًا عندما يكون المتحدِّث متردِّدًا في أن يعترف بنتائج ممكِنة غير مرغوب فيها. ففي هذه الحالة، غالبًا ما يأخذ الاعتراف الشكل: «يوجد احتمال محدود أن تحدُث تلك النتيجة في النهاية.» ولما كانت

جميع الاحتمالات محدودة، فهذه العبارة لا معنى لها على الإطلاق. والمقصود، بالطبع، هو أنه يوجد احتمال صغير ولكنه إيجابي أن يقع ذلك الحدث.

يتلخص حساب الاحتمال p في مسألة عد الحالات الإجمالية والحالات الملائمة. وتُعتبر مثل هذه الأسئلة متنوعة جدًّا ومثيرة للاهتمام، وغالبًا ما يمكن معالجتها من أكثر من زاوية. وتُعتبر الأسئلة المتعلقة باستخدام أكثر من نرد من بين أسهل الأنواع. على سبيل المثال، ما احتمالات الحصول على عددَين متطابقَين من رمي حجرَي نرد مرةً واحدة؟ العدد الإجمالي للحالات هو $36 = 6 \times 6$ لأن كل حجر نرد له ستة أوجه. والحالات الملائمة أو المستحسَنة عددُها 6، والتي تنتج من ظهور 1 في كلا النردَين، وظهور 2 في كلا النردين، وهكذا. ومن ثَم فإن الاحتمال المطلوب يساوي $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$. متى أمكن تحديد مجموعة الأحداث الممكِنة للتجربة (في هذه الحالة رمي حجر النرد) كمجموعة من النتائج متساوية الحدوث، فإن مثل هذه الأسئلة تصبح عبارة عن مسائلِ عدٍّ بسيطة. فمثلًا، احتمال الحصول على مجموع 7 من إلقاء حجرَي النرد يساوي أيضًا $\frac{1}{6}$؛ نظرًا لأن ست نتائج من الـ 36 نتيجةً الممكِنة تُعطينا إجمالي 7، في حين أن اثنتين فقط تُنتجان إجمالي 11؛ ومن ثَم فاحتمال الحصول على إجمالي 11 من إلقاء حجرَي النرد يساوي $\frac{1}{18} = \frac{2}{36}$.

مع ألعاب الورق ليس من السهل إجراء العد المطلوب بواسطة التخمين. فمثلًا ما احتمالات أن يكون معك خمس أوراق من الشكل نفسه في لعبة البوكر (علمًا بأن أوراق اللعب الكاملة تساوي 52 ورقة).

يمكنك هنا الاستفادة بشدة من بعض المعلومات عن معاملات ذات الحدَّين التي تحدَّثنا عنها في الفصل الرابع. مجموعة البوكر (اليد) هي اختيار 5 أوراق لعب من أصل 52، بحيث يكون إجمالي عدد المجموعات $C(52,5)$، ويكون هذا هو مقام نسبة الاحتمال. أما عن البسط، وهو عدد المجموعات المتَّفِقة في الشكل، فعلينا أن نسأل أولًا ما عدد المجموعات المتَّفِقة في الشكل في شكل معيَّن من أوراق اللعب، ثم نضربها في 4 لكي نحسب العدد الإجمالي للمجموعات المتفقة في الشكل في مجموعة أوراق اللعب الكاملة المكوَّنة من أربعة أشكال. على سبيل المثال، عدد المجموعات المتفقة في شكل القلب الأحمر هو عدد طرُق اختيار خمس أوراق من المجموعة ذات شكل القلب الأحمر المكوَّنة من 13 ورقة؛ أي $C(13,5)$. يمكننا عندئذٍ كتابة تعبير للاحتمال p على النحو الآتي:

$$p = \frac{4C(13,5)}{C(52,5)} = \frac{4 \cdot 13!}{5!8!} \cdot \frac{5!47!}{52!}.$$

مؤكَّدًا لسنا في حاجة لحساب الأعداد الضخمة مثل $52!$ أو مثيلاتها. ويمكن تبسيط هذا التعبير بحذف $5!$ من البسط والمقام؛ كما أن الحد $47!$ سوف يحذف كل الأعداد ما عدا خمسة في الحد $52!$، ومن ثَم نحصل على:

$$p = \frac{4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{33}{16,660} \approx 0.00198.$$

أي إن الاحتمال أقل من 0.2% — وهي حالة نادرة لكن ممكِنة الحدوث.

وقد قمنا بحل هذه المسألة باعتبار أن اختيار اليد هو مجرد اختيار واحد لخمس أوراق من 52 ورقة. كما فعلنا في مسألة اليانصيب، فإنه أيضًا يمكن حلُّ هذه المسألة ديناميكيًّا كما حدث في مسألة أعياد الميلاد؛ تخيل أنك تختار الأوراق الخاصة بك واحدةً تِلو الأخرى عند توزيعها. الورقة الأولى تحدِّد شكل المجموعة التي يمكنك أن تحصل عليها (لونها وعلامتها)؛ احتمال أن الورقة الثانية تتفق مع تلك المجموعة يساوي $\frac{12}{51}$ (يبقى في هذا الشكل 12 ورقةً من أصل 51 ورقةً باقية من أوراق اللعب الكاملة)، وهكذا … فنحصل على حاصل ضرب أربعة من الكسور:

$$\frac{12}{51} \times \frac{11}{50} \times \frac{10}{49} \times \frac{9}{48},$$

وهي الإجابة السابقة نفسها.

مسألتنا التالية تُشبِه، إلى حدٍّ ما، المسألة السابقة، ولكن الغريب أن الحل يرجع بنا إلى الأفكار التي طرحناها سابقًا في مسألة هيرون في الفصل السادس ومسألة النملة التي تسير حول الكوب. وقد يبدو هذا غريبًا نوعًا ما للوهلة الأولى نظرًا لطبيعة السؤال.

الأصوات تُعَد في انتخابات يوجد بها مرشَّحان A وB، حيث A هو الفائز في نهاية المطاف. ما احتمال أن B تفوَّق على A عند نقطةٍ ما أثناء فرز الأصوات؟

الإجابة تعتمد طبعًا على عدد الأصوات التي حصل عليها كل مرشَّح. لجعلها بسيطة ومثيرة لنفترض أن A أخذ $n + 1$ من الأصوات في مقابل حصول B على عدد n.

الفكرة الأولى أن ترسم صورةً تصف «مسار» الفرز. نرسم محورَين ونعيِّن النقط (x, y)، حيث النقطة (x, y) تشير إلى أنه بعد x من الأصوات التي فُرِزت كانت الصدارة لـ A بعدد y من الأصوات. إذَن، فقِيَم x تتراوح من 0 إلى العدد الكلي للأصوات، وهو $2n + 1$ في هذه الحالة، وقيم y تتغير لكنها أعداد صحيحة، وبالطبع قد تكون سالبة

إذا تصدَّر B في الفرز عند نقطةٍ ما. وأخيرًا نقوم بتوصيل النقاط معًا لنحصل على شكل بياني أوضح. يمكن تصوير كل الأرقام الممكنة بهذه الطريقة، وتبدأ كل المسارات عند 0 بالإحداثيات $(0, 0)$، وتنتهي عند Q بالإحداثيات $(2n + 1, 1)$؛ وبعد الوصول إلى $2n + 1$ من الأصوات في النهاية، نعلم أن A هو الفائز بصوت واحد زائد.

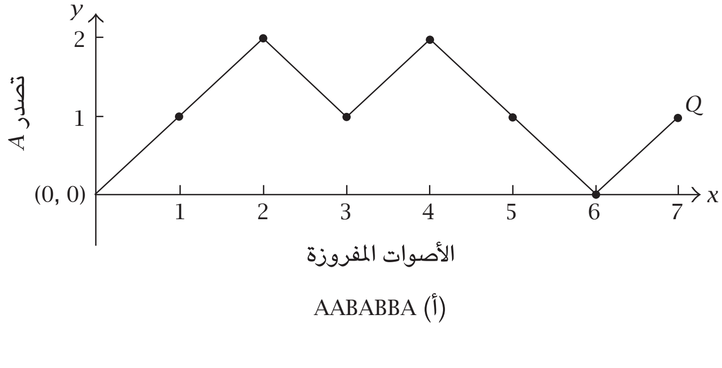
فمثلًا إذا جَمَع A أربعة أصوات، ولم يجمع B إلا ثلاثة، فهنا يمكن الفرز بالطريقتين الموضَّحتين في شكل ٨-١. الصورة البيانية للفرز تُسمى مسار الشبكة للفرز، أو ببساطةٍ مسار الفرز (انظر شكل ٨-٢). المرَّات التي تفوَّق فيها B على A في الفرز عند نقطة معينة تقابل هذه المسارات التي تلمس أو تعبُر الخط L، الذي يتكون من كل النقط التي يكون فيها $y = -1$، حيث إن قيمة y عندما تساوي -1 فهي تشير إلى تقدم B بصوت واحد. باستخدام العلامة # للتعبير عن «عدد»، يمكن كتابة تعبير عن الاحتمال p المطلوب:

$$p = \frac{\text{\# المسارات التي تلمس أو تعبر } L}{\text{\# المسارات}}.$$

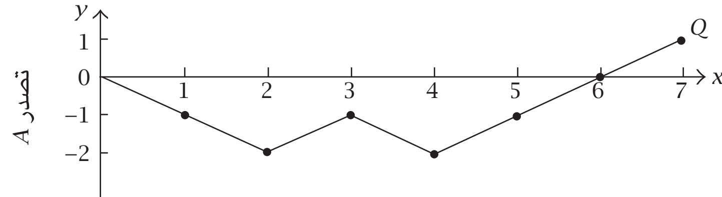
يبقى أن نحصل على العددين في هذه النسبة. المقام سهل بما فيه الكفاية. يوجد عدد $2n + 1$ من الأصوات، منها عدد n من الأصوات من نصيب B. وبمجرد أن نعرف عدد الأصوات التي حصل عليها B، يمكننا تحديد العدد الإجمالي للأصوات. ويعبر الرقم ذو الحدَّين $C(2n + 1, n)$ عن عدد طرق اختيار عدد n من الأماكن أثناء الفرز، التي تزيد فيها الأصوات الموجَّهة للمرشَّح B من عدد $2n + 1$ من الأماكن المتاحة.

بعد ذلك علينا إيجاد قيمة البسط. خذ مسارًا يقطع الخط L، ولتَكُن P هي نقطة التقاطع الأولى. إذا عكست المقطع الأول من المسار، الذي يبدأ من 0 وينتهي عند P على الخط، بينما تترك باقي المسار دون تغيير، فستكون النتيجة مسارًا جديدًا يبدأ عند النقطة $(0, -2)$ وينتهي عند النقطة Q في شكل ٨-٢. وهي الحالة نفسها لو رسَمْنا المسار من النقطة $(0, -2)$ إلى النقطة Q فسوف يقابل الخط L أولًا عند P، وإذا عكسنا المقطع الأول من المسار في الخط فسوف نحصل على مسار من 0 حتى Q ويتقاطع مع الخط L.

الخلاصة من كل ذلك أن عدد المسارات من هذا النوع الذي نبحث عنه يكافئ تمامًا عدد المسارات من $(0, -2)$ إلى Q. من السهل نسبيًّا معرفة عدد هذه المسارات؛ لأن المسار يرتفع ثلاث وحدات من البداية حتى النهاية؛ ومن ثَم لا بدَّ من وجود عدد $n + 2$ من

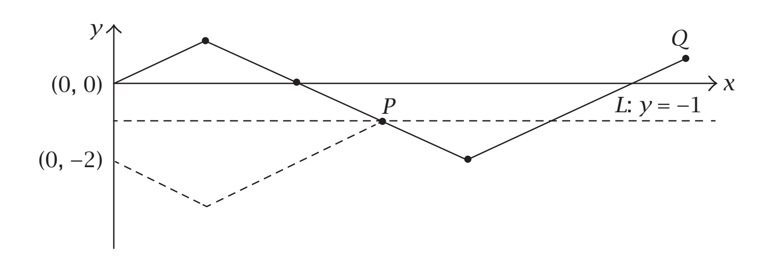


(أ) AABABBA



(ب) BBABAAA

شكل ٨-١



شكل ٨-٢

الأماكن التي يرتفع فيها على طول المسار، وعدد $n - 1$ من الأماكن التي ينخفض فيها. ويُحدَّد المسار من اختيار $n - 1$ من الأماكن التي ينخفض فيها المسار عن أصل $2n + 1$ من الأماكن المتاحة؛ ومن ثَم يُعطى العدد الكلي للمسارات من هذا النوع بالمعامل ذي

الحدَّين $C(2n+1, n-1)$. ويمكننا الآن إيجاد قيمة p:

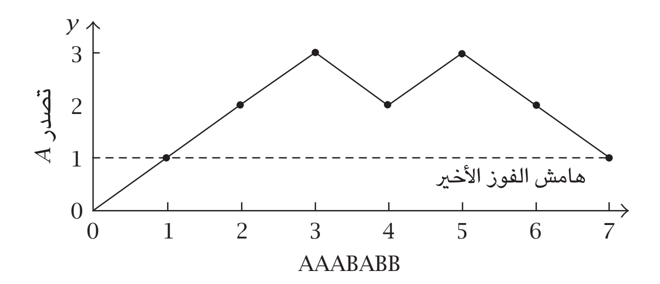
$$p = \frac{C(2n+1, n-1)}{C(2n+1, n)} = \frac{(2n+1)!}{(n-1)!(n+2)!} \cdot \frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!}.$$

مرةً أخرى معظم الحدود ستُحذف، ويبقى لدينا:

$$p = \frac{n}{n+2}.$$

فمثلًا إذا حصل A على 99 صوتًا مقابل حصول B على 98 صوتًا، بمعنى أنه إذا كان $n = 98$، فإن $p = 0.98$، وهذا يشير إلى وجود احتمال بنسبة 98% أن B تفوَّق على A في مرحلةٍ ما من مراحل الفرز، ولكنه ما لبث أن رجَع بخيبة أمل في النهاية.

من الممكن أيضًا القول، دون إجراء مزيد من الحسابات، إن هناك احتمالًا بنسبة 98% أن يكون A قد تفوَّق على B في مرحلةٍ ما من مراحل الفرز بأكثر من صوت. وهذا مفهوم من خلال النظر في الفرز العكسي، كما يلي. أي مسار يمكن النظر إليه باعتباره ممثِّلًا للفرز العكسي إذا بدأنا عند Q بدلًا من 0، ونقلب الشكل رأسًا على عقب. على سبيل المثال، انظر شكل ٨-١(ب) السابق. عند قلبه بالطريقة الموضَّحة، تحصل على صورة للفرز العكسي AAABABB. في الفرز الأصلي تأخر A في إحدى المراحل، ورأينا نظير هذه السمة في الفرز العكسي، حيث تقدم A في المرحلة المناظرة بعدد أصوات أعلى من هامش الفوز النهائي الذي كان يبلغ صوتًا واحدًا (انظر شكل ٨-٣).



شكل ٨-٣

هذه المشكلات ومشكلات أخرى مشابهة يمكن معالجتها باستخدام التقنية العكسية. السؤال الأصلي لهذا النوع يُطلَق عليه مسألة اقتراع برتراند-ويتورث، وفيما يأتي نصها:

إذا حصل A وB كلٌّ منهما على عدد a وb من الأصوات على الترتيب، حيث $a > b$، فما احتمال أن A كان يتصدر الفرز في كل مراحله؟ هذه المسألة أصعب قليلًا من المسألة التي تناولناها، ولكن الحل يتبع خطوطًا مشابهة، ويتضح أن الإجابة هي $(a - b)/(a + b)$.

تُعد أسئلة الاقتراع فئةً مهمة من المسائل، وتظهر في سياقات مختلفة مثل فيزياء الجُسيمات والجبر المجرد. ولا يفيد أن نحكم على الفكرة الرياضية في السياق الذي شُرحت فيه أولًا، والذي قد يكون أو لا يكون ذا أهمية خاصة. وأي فكرة جديدة تسمح بحل مسألة بطريقة جيدة تستحق الاحترام.

(٤) الفوز بالقوة في الروليت

الطُّرق السريعة المؤكَّدة للكسب في ألعاب الورق أو عجلة الروليت مطلوبة دائمًا، وتوجد طريقة واحدة تبدو للوهلة الأولى صالحة تمامًا. ويمكن تطبيق هذه الفكرة على أي لعبة مقامرة يُسمح فيها بالرهانات غير المحدودة، ولكن لنأخذ مثلًا لعبة الروليت. اللعبة ببساطةٍ أن تضع رهانًا على اللون الأحمر أو اللون الأسود، وإذا ظهر لونك فإنك تأخذ الرهان الذي وضعتَه بالإضافة إلى المبلغ الذي راهنتَ عليه.

الاستراتيجية بسيطة، يمكنك أن تظل تراهن على اللون الأسود حتى تفوز. في أول دورة راهنْ بمبلغ 1 جنيه إسترليني. فإذا خسرت فراهنْ بمبلغ 2 جنيه في المرة التالية. وإذا خسرت ثانية فراهنْ بمبلغ 4 جنيهات، وهكذا. وتستمر في مضاعفة الرهان بعناد حتى يحدث ويأتي اللون الأسود، وعندها تأخذ المكسب وتتوقف عن اللعب.

هل يجعل ذلك منك فائزًا بالتأكيد؟ حسنًا بطريقةٍ ما، الإجابة هي «نعم». إذا كانت عجلة الروليت عادلة، فإنها حقًّا سوف تقف عند اللون الأسود عاجلًا أو آجلًا مثلًا بعد عدد n من الدورات، حيث $n \geq 1$. كم خسرت أنت في الدورات $n - 1$ السابقة؟ بما أنك تستخدم استراتيجية الضِّعف أو لا شيء، إذَن فهذا ينتج متسلسلةً هندسية بسيطة يمكن إيجاد مجموعها باستخدام صيغة من الفصل السابق:

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

على أي حال، عندما تفوز في الدورة التي ترتيبها n سوف تحصل على مبلغ 2^n من الجنيهات؛ مما يعوِّض أي خسارة تراكمية تكبَّدتها، ويمنحك مبلغ 1 جنيه زيادةً عما

دفعته في البداية. يمكنك القول إنه ليس كثيرًا، لكنك فائز بالتأكيد، فإذا لم تشعر بالرضا فيمكنك اللعب مرةً أخرى وتكسب جنيهًا، وتستمر حتى تكسب المال الذي ترغب فيه!

هل يحدث هذا حقًّا في الحياة العملية؟ الإجابة أنه يكاد يكون من المؤكَّد حدوثه. بعد هذا القول أُسارع إلى نصحك بألا تستخدم هذه الاستراتيجية أبدًا؛ لأنك ستكون مهدَّدًا بالإفلاس من أجل جنيه واحد.

ما الخطأ الذي قد يقع؟ المشكلة أنه مع أن اللون الأسود سيظهر في النهاية لا محالة، إلا أن هناك دائمًا احتمالًا أنه لن يظهر حتى تفقد كل ما تملك. بالتأكيد، إذا دخلت الكازينو ومعك مبلغ ضخم، فلنقُل مثلًا $10,000$ جنيه إسترليني، فإن فرصة حدوث ذلك ضئيلة جدًّا. لا بدَّ أن يظهر الأحمر 13 مرةً متتالية، قبل أن تُحرج بعدم قدرتك على الاستمرار في استراتيجيتك؛ إذا ظهر الأحمر 13 مرة، فإنك ستتكبد خسارةً تراكمية قدرُها $2^{13} - 1 = 8191$، ولن يكون لديك أموال لتضاعف المبلغ مرةً أخرى.

قد تقول بسخرية إن ذلك لا يستحق القلق؛ إذ إن احتمال ظهور الأحمر 13 مرةً متتالية هو احتمال 1 في المليون. هذا الوضع ليس مرجَّحًا، لكنه ليس مستبعَدًا بذلك القدر؛ إذ إن الرقم الدقيق هو $\left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \frac{1}{8192} \approx 0.00012$، وهو أكبر قليلًا من 1 في $10,000$. ومع ذلك، فمن شِبه المؤكَّد أنك سَتربح الجنيه، ولكن لنواجه ذلك إذا كان لديك $10,000$ جنيه لتعبث بها، فإن الفوز بجنيه واحد زيادة ليس مهمًّا أساسًا، ولكي تحصل عليه فأنت ستُخاطِر بالكثير والكثير جدًّا.

الوضع عكس ذلك في اليانصيب. في اليانصيب تُقدِم على مخاطرة مهولة (لأنك من شِبه المؤكَّد أنك ستخسر) برهانٍ صغيرٍ من أجل الحصول على فرصة ضئيلة جدًّا للفوز بمبلغ كبير جدًّا؛ أما في لعبة الروليت السابقة، فأنت تُقدِم على مخاطرة ضئيلة برهانٍ ضخمٍ جدًّا من أجل الحصول على فرصة شِبه مؤكَّدة للفوز بمبلغ هزيل جدًّا جدًّا. إذَن، فمن الأفضل بالنسبة لك أن تراهن على اليانصيب.

(٥) ميزة لعب الفريق البطولات العالمية على ملعبه

في سلسلة المباريات العالمية بأمريكا للبيسبول وكرة السلة، الفريقان في نهائي البطولة يتنافسان للفوز بالبطولة، وذلك بلعب سلسلة من سبع مباريات تنتهي بنجاح أحد الفريقَين في الفوز بأربع مباريات متتالية. فمثلًا، في هذا العام سيكون النهائي بين أطلانطا A وبوسطن B. وتوجد ميزة مفهومة للفريق الذي يلعب على أرضه؛ ولهذا السبب

تُعلَّق آمالٌ كبيرة على ترتيب المباريات التي تُلعَب على أرض كل فريق. يوجد عدد من العوامل التي يتعذر قياسها هنا، لكن الاعتقاد السائد هو أنه توجد ميزة في اللعب مبكرًا على أرضك في هذه السلسلة، لا سيما خلال المباريات الأربع الأولى؛ ببساطة لأنك ربما لا تلعب أبدًا في المباريات المتأخرة؛ ومن ثَم، إذا كانت المباريات التي ستلعبها على أرضك مؤجَّلةً إلى وقتٍ لاحق في السلسلة، فربما تُحرَم من فرصة الاستفادة من هذه الميزة. هذه حجةٌ معقولة جدًّا ومُغْرية، لكني سوف أُثبِت الآن أنها باطلة؛ إذ لا توجد أي ميزة متأصِّلة في تحديد وقت لعب المباريات التي تُجرى على أرضك في سلسلة المباريات السبعة.

يمكننا إظهار ذلك أولًا من خلال الحساب المباشر. ويمكن توضيح ذلك أيضًا بمثال بسيط، فلنقُل إن السلسلة لأفضل واحد من ثلاثة فقط، ولنفترض أن الفريق A يلعب في أرضه مرةً واحدة، والفريق B يعلب في أرضه مرتين. لنفترض أن احتمال فوز A على أرضه هو p، واحتمال فوزه على ملعب المنافس هو q؛ ربما تظن أن p أكبر من q، ولكن الحجة لن تعتمد على ذلك. ومن ثَم، احتمال خسارة A على أرضه هو الاحتمال المُكمل $1 - p$، وبالمثل احتمال خسارته خارج أرضه يساوي $1 - q$. ولنرمز باللعب على أرض الفريق بـ h، ونرمز للعب على أرض المنافس بـ a، عندئذٍ يمكننا وضع جدولَين لمباريات A، وهما haa وaah. وفقًا للرأي المذكور، فإن A يكون لديه فرصة أكبر للفوز تبعًا للجدول الأول haa الذي يلعب فيه فريقه على أرضه أولًا؛ لأنه قد لا تُتاح له فرصة اللعب على أرضه على الإطلاق وفقًا للجدول الثاني. دعنا نحسب احتمالات فوز A باللقب في كلا الجدولين.

ولنرمز بـ W لفوز الفريق A، ونرمز بـ L لخسارته. أيًّا كان ترتيب اللعب على أرضه أو على أرض المنافس، فيمكن للفريق A أن يفوز بثلاث طرق مختلفة LWW وWLW وWW؛ وفي هذه الحالة الثالثة تُلعَب مباراتان فقط، وتكون الثالثة غير ضرورية. والآن لننفِّذ الجدول haa. احتمال أن يخسر A المباراة الأولى هو $1 - p$؛ لأنها ستمثِّل خسارة على أرضه. واحتمال أن يفوز في المباراة الثانية أو الثالثة يساوي q. ومن ثَم طبقًا للجدول haa، فإن احتمال أن تسير المباريات LWW بالنسبة إلى A هو حاصل ضرب هذه الاحتمالات الثلاثة: $\Pr(LWW) = (1 - p)q^2$ (حيث Pr ترمز لكلمة احتمال ...)

وبالمثل يمكننا حساب:

$$\Pr(WLW) = p\,(1 - q)\,q \quad \text{and} \quad \Pr(WW) = pq.$$

ومن ثَم، فإن احتمال أن يفوز A بالبطولة هو:

$$(1-p)\,q^2 + pq\,(1-q) + pq = q^2 - 2pq^2 + 2pq. \qquad (8\text{–}1)$$

والآن دعنا نتعامل مع الجدول aah. بالطريقة نفسها:

$$\begin{aligned} \Pr(LWW) + \Pr(WLW) + \Pr(WW) &= (1-q)\,qp + q\,(1-q)\,p + q^2 \\ &= qp - q^2p + qp - q^2p + q^2 \qquad (8\text{–}2) \\ &= q^2 - 2pq^2 + 2pq. \end{aligned}$$

الحسابات الموضَّحة في (8–1)، (8–2) تعطي الإجابة نفسها؛ أي إنه لا توجد ميزة يحصل عليها الفريق A باللعب وفقًا للجدول haa أو الجدول aah البديل.

يمكن زعم أن نموذجنا مُفرِط في التبسيط. فنحن نفترض قيمًا ثابتة لاحتمالات فوز A معتمدة فقط على كونه يلعب على أرضه أو على أرض المنافس، وبصرف النظر عن العوامل الأخرى كافةً بما فيها النتائج السابقة. وهذا غير واقعي. ومع ذلك، فمِثل هذه الطريقة في التفكير تعني عدم استيعاب المغزى من ذلك النموذج. إذا كان مبدأ أن اللعب على أرضك في المباريات المتأخرة يؤثر سلبًا على النتائج؛ هو مبدأً صحيحًا، فإنه كان سينطبق على هذا النموذج، وكان هذا التأثير السلبي سيظهر في الحسابات السابقة. وبما أنه لم يظهر، إذَن فهذا المبدأ ليس صحيحًا.

الحسابات الجبرية السابقة تدل على أن احتمالات فوز A لا تتغير وفقًا للجدولين، ولكنها لا تفيد في توضيح السبب. ويبقى من غير الواضح، لماذا يكون الافتراض الأولي بأن لعب المباريات المبكرة على أرضك يُعتبر ميزةً؛ هو افتراضًا خاطئًا بصفةٍ عامة. قد يساعد النظر إلى الأمور بالطريقة التالية. تخيل أن الفِرَق قررت أنها ستلعب جميع المباريات في السلسلة أيًّا كانت النتيجة. بما أنه لم يعُد هناك احتمال ألَّا تلعب بعض المباريات المقررة على أرضك، إذَن فالحجة الأصلية التي تدعم الافتراض لم تَعُد سارية؛ ومن ثَم لا يوجد أي سببٍ واضحٍ لأن يكون لعب المباريات المبكرة على أرضك ميزة. ومع ذلك، فهذا التغيير المتخيل لا يستطيع تغيير إمكانية فوز الفريق A بموجب أي جدول معين؛ لأنه لن يسري إلا بعد أن يكون الفائز قد تقرر. وهكذا نصل إلى استنتاج أن الميزة الظاهرية للعب المباريات الأولى على أرضك كانت سرابًا.

(٦) مباراة من الأفضل

هذا النوع من المباريات يشارك فيه لاعبان عند حلقة كرة السلة، لكن يمكن تطبيقه على أي لعبة مهارية. يتناوب اللاعبان في محاولة تسجيل هدف بالطريقة التي تحلو لهما. فإذا نجح اللاعب الأول في التسجيل، فعلى اللاعب الثاني أن يحاول أداء اللعبة نفسها بالطريقة نفسها؛ فإذا فشل، يكون اللاعب الأول قد أحرز نقطة؛ السؤال المطروح هو: هل تحاول أداء حيل صعبة أم حيل سهلة؟ المنطق السليم يخبرنا أن اللاعب يُفضل أن يحاول أداء حيلة يجدها أسهل بالنسبة له، ولسببٍ ما ربما يجدها المنافس صعبة. أنا متأكد من أن هذا هو الحل، ولكن يبقى السؤال: بما أن كل الأشياء متساوية، فأي استراتيجية تمنحك أعظم احتمال لإحراز النقط؟

لننظر إلى أبسط حالة، وهي التي تكون فيها أنت والمنافس متساويَين، بحيث يكون لديكما الاحتمال نفسه x في النجاح في أي محاولة للتصويب. سوف تُحرز نقطة فقط عندما يحين دورك في البدء، وتنجح في التصويب بينما يفشل خصمك. نظرًا لأن احتمال الخسارة يساوي $1 - x$، فاحتمال إحرازك لنقطة بتصويبة صعبة x، يكون $x(1 - x)$؛ على سبيل المثال، إذا حاولت إصابة الهدف برميةٍ نسبةُ نجاحها واحد إلى ثلاثة، فإن احتمال إحرازك للنقطة يساوي $\frac{2}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$. ما تحتاجه فعلًا هو إيجاد قيمة x التي تحقق أكبر قيمة للتعبير $x\,(1 - x) = x - x^2$.

يمكن حساب ذلك باستخدام التقنية الجبرية لإكمال المربع، التي تحدَّثنا عنها في الفصل الخامس، لحل المعادلة التربيعية. معامل x هنا هو الواحد الصحيح؛ ومن ثَم نجمع ونطرح مربع $\frac{1}{2}$، ونعيد كتابة التعبير كما يلي:

$$x - x^2 = -\left(x^2 - x\right) = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

ولأن مربع أي عدد دائمًا ما يكون غير سالب، إذَن فتكبير المقدار يحدُث بتصغير المربع المطروح؛ أي بوضع $x - \frac{1}{2} = 0$؛ ومن ثَم فأحسن قيمة لـ x هي $x = \frac{1}{2}$، وفي هذه الحالة يكون احتمال إحرازك لنقطة في دورك يساوي $\frac{1}{4}$. في مثل هذه المباريات يكون التوسط هو أفضل استراتيجية.

(٧) الألعاب ونظرية الألعاب

ليس هناك كثير منا — وخاصةً الأشخاص الذين يحبون العلم — ممَّن لم يشاهد مسلسل «ستار تريك» على مر السنين. فهذا المسلسل احتوى دائمًا على شخصية تتصرف بطريقة ميكانيكية. في الحلقات الأصلية كانت هذه الشخصية هي السيد سبوك، وهو رجل من كوكب فولكان تخلَّص من كل السلوكيات الانفعالية، وفي «نيو جنيريشن» لدينا مستر داتا، وهو إنسان آلي مهذَّب، لكنه في النهاية خالٍ من العاطفة. السيد سبوك يؤكد لنا دائمًا أنه يتصرف بطريقة منطقية. ولا أستطيع أن أتذكر قيام الشخصية بتفسير ما المقصود بذلك، ولكننا استنتجنا ضمنًا أنه يعيش وَفقًا لمجموعة من المبادئ والقيم، ويتصرف بطريقة تتوافق معها دائمًا. فهو لن يُقدِم على أي عمل غير عقلاني؛ بمعنى أنه لن يخالف بقصدٍ مبادئه، ولن يفعل شيئًا سخيفًا، وإن كان غير مؤذٍ، لأنه ليس لديه دافعٌ للتصرف بهذه الطريقة.

أقرَّ البشريون في هذا المسلسل بأن هاتين الشخصيتين كانتا على العموم متفوقتين جسديًّا وعقليًّا عليهم. وعلى الرغم من ذلك، فقد كانوا يصرون على امتلاكهم ميزة معينة طَوال الوقت. كان البشر دائمًا ما يصرون على أن قدرتهم على التصرف بلا منطق أحيانًا ما تكون في مصلحتهم. قد تكون هناك بعض الحقيقة في هذا، لكن معظم الأمثلة التي جاءت في المسلسل، هي في رأيي مغالطات. وتكمن المشكلة في افتراض أن القدرة على مخالفة التوقعات هي أقرب ما تكون إلى اللاعقلانية، وهذا بعيدٌ كل البعد عن الحقيقة في كثير من المواقف الواقعية.

في بعض الألعاب، لا سيما البوكر، من المهم أن يكون لعبك بشكلٍ ما غير متوقَّع. وطبعًا هذا لا يعني أن تلعب بطريقة غير عقلانية. الإنسان الآلي داتا دائمًا ما يخسر في البوكر؛ ربما لأنه لا يستطيع التعامل مع خدع منافسه البشري «اللامنطقية». وهذا يعني أنه بُرمِج بطريقة سيئة. في لعبة مثل البوكر من المهم ألا تقدم معلومات عمَّا معك من أوراق إلى منافسك. لكنك مضطر لذلك إلى حدٍّ ما عند المراهنة؛ لأن اللاعب — عمومًا — سيكون مستعدًّا للمخاطرة بمبالغ أكبر عندما يكون معه مجموعة أوراق قوية (تطلق على مجموعة الأوراق التي في يد اللاعب كلمة يد)، مقارنةً بما إذا كانت معه مجموعة أوراق ضعيفة. فإذا كان أحد اللاعبين لا يخادع أبدًا، فسوف يلاحظ منافسه ذلك؛ ومن ثَم يستطيع قراءة قوة أوراقه من خلال حجم مراهنته؛ ومن ثَم يكون اللاعب «المنطقي» في وضعٍ غير ملائم. لا يوجد شيء غير منطقي ضمنيًّا في الخداع في لعبة البوكر؛ فالخداع

جزء من طبيعة اللعبة، ويمثل جزءًا لا يتجزأ من الاستراتيجية الجيدة. لا يوجد سبب يمنع تصميم استراتيجية اللعبة على الكمبيوتر بحيث يدخل فيها الخداع كعنصر عقلاني.

عندما يتكلم عالم رياضيات أو اقتصادي أو واضع الاستراتيجيات العسكري عن الاستراتيجية المُثلى للعبة، فأنا أعتقد أن كثيرين من المستمعين سوف يفترضون على الفور أن الاستراتيجية تحتوي في بنائها على أفضل استجابةٍ لأي سيناريو ممكن أن ينشأ خلال هذه اللعبة. في الألعاب الواقعية ونظرية الألعاب الواقعية نادرًا ما يحدث هذا بالتأكيد؛ إذ من المهم ألَّا يستطيع خصمك التنبؤ باستجابتك على نحوٍ يقيني. فعنصر المفاجأة في حد ذاته له قيمته، ولا ينبغي تسليمه لخصمك دون انتزاع الثمن.

هذا واضح في الألعاب الأسهل جدًّا من البوكر، مثل لعبة «ورقة وحجر ومقص» التي يلعبها لاعبان. في هذه اللعبة يختار اللاعبان في الوقت نفسه أحد الاختيارات؛ ورقة أو حجرًا أو مقصًّا بإشارة من اليد. الورقة «تغطي» الحجر الذي «يقلل حدة» المقص الذي بدوره «يقص» الورقة، واللاعب يُحرز نقطة عندما تسيطر يده على يد خصمه. من الواضح أنك لا تستطيع تحمُّل اللعب على نحوٍ متوقَّع في هذه اللعبة؛ فعلى سبيل المثال إذا اتبعت ترتيبًا معينًا ثابتًا، مثل ورقة ثم حجر ثم مقص، في كل مرة، فسوف يلاحظ خصمك ذلك، ويتبع ترتيبًا مثل مقص ثم ورقة ثم حجر، ويفوز عليك في كل مرة. إذَن فمن الضروري أن تكون عشوائيًّا في أي استراتيجية جيدة لممارسة لعبة «ورقة وحجر ومقص». وليس هناك ما هو غير منطقي في هذا.

ثَمة ألعاب أخرى أسهل من البوكر ولكنها أكثر صعوبة من ورقة وحجر ومقص، وهذه الألعاب يمكن تحليلها رياضيًّا وحساب أفضل استراتيجيات للتعامل معها. ويشرح مسلسل «ذا أسنت أوف مان» التليفزيوني الكلاسيكي لعبة «مورا» التي تُعَد نموذجًا لهذه الألعاب. في أبسط أشكال هذه اللعبة، يُظهر كل لاعب إصبعًا أو اثنتين في الوقت نفسه مع اللاعب الآخر، ويخمِّن عدد الأصابع التي يُظهرها الخصم، علمًا بأنه لا يوجد إلا أربعة اختيارات $(1,1)$ و$(1,2)$ و$(2,1)$ و$(2,2)$، حيث نعني بالاختيار $(2,1)$ أن اللاعب أظهر إصبعَين وخمَّن أن الآخر أظهر إصبعًا واحدة. إذا استطاع اللاعبان تخمين عدد الأصابع التي يُظهرها المنافس بطريقة صحيحة أو إذا أخطأ كلاهما، فلن يُحرز أيٌّ منهما أي نقاط؛ فاللاعب لا يحرز نقطة إلا إذا خمَّن عدد الأصابع التي يظهرها خصمه، بينما يفشل الخصم في تخمينه. وفي هذه الحالة يكسب اللاعب الذي تنبؤه صحيح قدرًا من النقاط يساوي مجموع الأصابع التي أظهرها اللاعبان.

أفضل الاستراتيجيات هو إهمال الاختيارين $(1,1)$ و$(2,2)$، واستخدام الاختيارين $(1,2)$ و$(2,1)$ عشوائيًّا، ولكن بالنسبة الإجمالية 7 إلى 5. كيف تفعل ذلك؟ سوف تحتاج إلى مولِّد أرقام عشوائية (كثير من الآلات الحاسبة لديها هذا البرنامج) مجهَّز بحيث يولِّد أعدادًا صحيحة عشوائية من 1 إلى 12. تجاهلْ سلوك الخصم والعب $(1,2)$ إذا كان العدد العشوائي المولَّد يقع في النطاق من 1 إلى7، والعب البديل $(2,1)$ إذا كان العدد المولَّد يقع في النطاق من 8 إلى 12. بطبيعة الحال هذا لا يضمن لك الفوز في لعبة معيَّنة، فهذا الأمر يعتمد على الحظ. ولكنك إذا التزمتَ بهذه الاستراتيجية على المدى البعيد؛ أي كلما لعبتَ عددًا أكبر من الأدوار، فهي استراتيجية لا تُهزم. وأفضل ما يُتوقع أن يفعله الخصم على المدى البعيد هو أن يتعادل معك.

يوجد قدر كبير من الحسابات استُخدم في استنتاج هذه الاستراتيجية، كما استُخدمت قواعد رياضيات أساسية في إثبات أنها هي الاستراتيجية الفُضلى. على أي حال، من السهل التحقق من أن هذه الاستراتيجية فعَّالة مهما كانت الاستراتيجية التي يتبعها خصمك. إذا التزم اللاعب الآخر دائمًا باستراتيجية $(1,2)$ و$(2,1)$ مثلما تفعل، فلن يفوز أيٌّ منكما بأي شيء؛ لأن كليكما إمَّا ستتوقعان الشيء الصحيح (هذا يحدث إذا اختار كلٌّ منكما اختيارًا مختلفًا)، وإما الشيء الخطأ (إذا اختار كلٌّ منكما نفس الاختيار). النقاط لا تُحرَز إلا إذا اختار خصمك $(1,1)$ أو $(2,2)$. نفترض أن خصمك اختار $(1,1)$، إذَن فهناك احتمال 7 من 12 أنك ستختار $(1,2)$، وستفقد نقطتين، ولكن هناك احتمال 5 من 12 أنك ستختار $(2,1)$، وسوف تكسب 3 نقاط. إذَن في المتوسط، من كل 12 مرة يختار فيها الخصم $(1,1)$ سيكون صافي ربحك هو:

$$5 \times 3 - 7 \times 2 = 15 - 14 = 1 \text{ point.}$$

وتبيِّن حسبةٌ مماثِلة أنك ستكسب إذا اختار خصمك $(2,2)$، سوف يكسب الخصم 4 نقاط على 5 من الـ 12 دورًا عندما تختار أنت $(2,1)$، ولكنه سوف يخسر 3 نقاط على 7 من الـ 12 دورًا عندما تختار أنت $(1,2)$؛ ومن ثَم فمتوسط مكسبك على المدى البعيد لهذا النوع من الألعاب سيكون:

$$7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1 \text{ point.}$$

تبيِّن الحسابات أن الناتج في مصلحة استراتيجيتك، ولكن هذا لن يكون واضحًا تمامًا لأي لاعب غير مُطَّلِع حتى بعد حصوله على خبرة معقولة في ممارسة هذه اللعبة؛ معظم

المقامرين يستنتجون بالتأكيد أنهم ينبغي أن يختاروا $(1,1)$ و$(2,2)$ من آنٍ لآخر، ولكن هذا اعتقادٌ خاطئ.

وهكذا نرى أن مخالفة التوقعات يمكن أن تكون منطقية. على أي حال توجد حالات يكون الخصم غير المنطقي فيها هو خصمًا أقوى كثيرًا من الخصم المنطقي العقلاني. فلنأخذ أزمة الرهائن مثلًا. تخيل أنك رجل شرطة يفاوض في محاولة للقبض على السيد سبوك، الذي يهدِّد بقتل رهينة. يمكنك أن تقول:

> «سبوك، الاختيار الوحيد أمامك هو الاستسلام! إذا قتلتَ الرهينة فسيُقبض عليك في كل الحالات، وسوف تتعرض لعقوبة أشد. من ثَم، فتهديدك غير منطقي. أنت لن تنفِّذه لأنه ليس لديك سبب يحملك على تنفيذه.»

شخصية سبوك المنطقية ستكون عاجزةً عن دحض هذه الحُجة؛ ومن ثَم سيمكنك إلقاء القبض عليه بكل سهولة. من ناحية أخرى إذا كنت تتعامل مع انتحاريٍّ معتوه، فسوف تواجه صعوبات حقيقية. يمكنك تقديم نفس الحُجة، ولكن سوف تقابل بالرد الآتي من الخصم:

> «آه حجتك مردود عليها. فأنا لست شخصًا منطقيًّا عاقلًا، لكنني معتوه لا أحتاج لأسباب! ولا يزال لديَّ القدرة على تنفيذ التهديد؛ وعلى النقيض من سبوك، أنا مُحصَّن ضد منطقك.» (أو عبارة بهذا المعنى.)

حجة المعتوه مُحكَمة للغاية. إذا حاولت القبض عليه، فإنك ستخاطر حقيقةً بحياة الرهينة. تكمُن الصعوبة في أن المعتوه إنسان يمكن أن تكون لديه رغبات متناقِضة، وذلك على النقيض من سبوك. فمن ناحية قد لا يرغب في معاناة عقوبة أشد، مثله في ذلك مثل سبوك، لكنه من ناحية أخرى، ربما يحتاج للتنفيس عن شعوره القوي بالغضب والانتقام. ومن يدري؟ لا يستطيع أحدٌ التنبؤ بأي رغبة منهما سوف تسيطر عليه في اللحظة الحاسمة من الصراع؛ فتصرفاته يمكن أن تخالف جميع التوقعات حتى توقعاته هو شخصيًّا. وهذه الطبيعة المعقَّدة والمتقلِّبة تمثِّل صعوبةً خطيرة للمفاوض. ومن ثَم، فهو بالتأكيد خصمٌ صعب التعامل معه أكثر من السيد سبوك في لعبة الرهينة.

أن تكون أقوى لاعب لا يعني بالضرورة أنك ستكون في مكانة أفضل لكسب المباراة. قد يبدو هذا تناقضًا، ولكن هذا النوع من التناقض ينشأ غالبًا في الألعاب التي يلعبها أكثر

من لاعبَين، مثل الأوضاع الدبلوماسية التي تدخل فيها أممٌ عديدة. في مثل هذه المواقف من الجيد أن تكون قويًّا دون إظهار التهديد. لأنك إذا مثَّلتَ تهديدًا غير محتمل للاعبين الآخرين، فربما يشكِّلون حلفًا ضدك ويقضون عليك.

مثال على هذا النوع من الألعاب هو اللعبة المتعددة اللاعبين لتبادُل إطلاق النار؛ فيها يكون لدى اللاعبين درجات مختلفة من مهارة التصويب معروفة لجميع اللاعبين. وقد يتبدَّى لنا أن اللاعبين الأقل مهارة في التصويب هم الأقوى؛ لأن اللاعبين الأكثر مهارةً لا يملكون إلا خيار تصويب بنادقهم بعضهم نحو بعض؛ مما يؤدي إلى إبادتهم جميعًا أو إبادة أكثرهم مخلِّفين وراءهم الرماة الأقل مهارةً ليفوزوا. في الواقع في لعبة إطلاق النار الثلاثية أضعف الرماة، وفقًا لنظام احتمالي معيَّن، قد يكون أفضل حالًا بإطلاق النار في الهواء.

لعل أهم مثال على هذا النوع في نظرية الألعاب يحمل اسم «معضِلة السجينَين». وأحيانًا يُسمى «متناقضة السجينين» لأنه يوضِّح أنه يمكن لسياسة الأنانية أن تكون أسوأ من سياسة التعاون لكل فرد من أفراد المجتمع. عادةً ما ينطوي وصف اللعبة على سجينَين يواجهان عواقب معيَّنة عند الاعتراف بالجريمة أو عدم الاعتراف بها، والنتيجة لا تتوقف على قرار أحدهما فقط بل تتوقف أيضًا على قرار الآخر.

الاختيارات التي تواجه السجينَين تشبه الاختيارات في اللعبة التي نتائجها موضَّحة في شكل ٨-٤. اللاعب A واللاعب B لديهما خياران؛ يمكن لكليهما أن يكتبا الرقم 1 أو الرقم 2. وهما يكتبان في الوقت نفسه. ويوضح الجدول أرباح كل لاعب. على سبيل المثال، إذا كتب اللاعب A الرقم 1 بينما كتب اللاعب B الرقم 2، فإن A لا يحصل على شيء، بينما يحصل B على 20 جنيهًا إسترلينيًّا. ولا تُلعب اللعبة إلا مرةً واحدة. فماذا ينبغي أن يفعلا؟

لنفكر في موقف اللاعب A. فهو غير قادر على السيطرة على اللاعب B، على الرغم من أنهما حُرَّان في الاتفاق معًا على أي شيء قبل اللعب، ويمكن أن يتفقا على «صفقة». ومع ذلك فعندما تأتي اللحظة الحاسمة فكلٌّ منهما يستطيع اختيار العدد الذي يروق له. السيد A يريد أفضل صفقة لنفسه وفيما يلي أسبابه. إذا كتب B العدد 1 فأنا أكسب 5 جنيهات إذا كتبتُ أنا 1، ولكني سأكسِب 20 جنيهًا إذا كتبتُ 2؛ ومن ثم في هذه الحالة من الأفضل أن أكتب 2. البديل هو أن B يكتب 2، في هذه الحالة لن أكسب شيئًا إذا كتبت 1، لكن سأكسب جنيهًا واحدًا إذا كتبت 2. ومن ثم بصرف النظر عما يكتب B فمن الأفضل أن أكتب 2، وهذا ما سوف أفعله.

		B: 1	2
A:	1	(5, 5)	(0, 20)
	2	(20, 0)	(1, 1)

شكل ٨-٤

اللعبة متناظرة تمامًا بالطبع؛ ومن ثم فإن B يستخدم نفس المنطق ويكتب 2 وهذا يعني أن كلًّا منهما سيحصل على جنيه واحد. يا لهما من أحمقين! لو أنهما تعاونا فقط وكتب كلٌّ منهما 1 فإن كلًّا منهما كان سيكسب 5 جنيهات، لكنهما لا يثق أحدهما بالآخر. ولكن لماذا يثقان؟ رغم كل شيء، المنطق الموضح في الفقرة السابقة لا يمكن دحضه. وكل لاعب عليه أن يحاول إقناع الآخر بكتابة 1، لكنهما إذا غلَّبا مصلحتهما الشخصية، فإنهما سيختاران 2. أخشى أن هذه هي اللعبة؛ لعبة معضلة السجينين.

إنه لأمر مختلف إذا كانت اللعبة ستُلعب مرات عديدة؛ لأنه في هذه الحالة سيكون من المعقول أن نتعاون حقًّا. ينبغي أن يتبنى اللاعبان استراتيجيتين متناقضتين مرة تلو الأخرى؛ ومن ثم يتبادلان الحصول على 20 جنيهًا. بهذه الطريقة كل لاعب سيحصل في المتوسط على 10 جنيهات في كل مرة، وهي أفضل من 5 جنيهات إذا استخدما استراتيجية $(1,1)$ التعاونية. ومع ذلك، فعندما يبدأ عدد المباريات المتبقية في التناقص، فسوف يظهر منطق المصلحة الشخصية مرة أخرى على السطح، ويصبح اللاعبان عرضة لأن يسقطا في فخ الاستراتيجية $(2,2)$ المنطقية مرة أخرى.

الفصل التاسع

النسبة الذهبية

في الفصل الثاني رأينا أنه على الرغم من أن $\sqrt{2}$ ليس عددًا عشريًّا متكررًا، فإن له مفكوكًا متكررًا من نوع مختلف. وسوف أشرح الآن كيف يتحقق ذلك.

نبدأ بكتابة $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$. ثم نفكر في العدد $\sqrt{2} - 1$ على أنه معكوس معكوسه. وهذا يبدو محيرًا، لكن صبرًا:

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{1/(\sqrt{2} - 1)}.$$

والآن فلنطبق قاعدة أساسية من قواعد الجبر، لتتيح لنا القيام بشيء مهم. وتلك هي عملية التخلص من الجذر الموجود في المقام، والتي سنطبقها على $\frac{1}{(\sqrt{2}-1)}$. سنقوم بضرب كل من البسط والمقام في المرافق، في هذه الحالة $\sqrt{2} + 1$؛ لأنه بفك المقام يصبح خاليًا من الجذور التربيعية؛ لأن تغيير الإشارة سوف يؤدي إلى حذف الحدود المتوسطة:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}.$$

وفي هذه الحالة سيصبح المقام الجديد 1. وهذا يعطينا:

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

يمكننا الآن استبدال الظهور الجديد للعدد $\sqrt{2}$ بالعدد $1 + (\sqrt{2} - 1)$ ثم نكرر العملية بلا توقف، لنحصل على:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1+1+(\sqrt{2}-1)} \\ &= 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}} \\ &= 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}} = \cdots\end{aligned}$$

إذن فمفكوك الكسر المستمر للعدد $\sqrt{2}$ هو:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\cdots}}}}.$$

يمكننا استخدام ترميز الكسر العشري المتكرر لتمثيل هذا ونكتب $\sqrt{2} = [1, \dot{2}]$. وعندما نقطع هذا التمثيل بعد عدد معين من عمليات القسمة، فسنحصل على تقريب نسبي للعدد $\sqrt{2}$ (ويساوي بالتقريب لأقرب ثلاثة أماكن عشرية العدد 1.414). باستخدام الخطوات 1، و2، و3 فقط سنحصل على الكسور الآتية:

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{2+1} &= \frac{4}{3} = 1.333\ldots, \\ 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+1}} &= \frac{10}{7} = 1.428\ldots, \\ 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+1}}} &= \frac{24}{17} = 1.412\ldots\end{aligned}$$

ما صادفناه هنا هو في الحقيقة تطبيق آخر لخوارزمية إقليدس التي تحدثنا عنها في الفصل الرابع. لتفسير ذلك، دعونا نبدأ مرة أخرى بالعدد النسبي $\frac{92}{73}$، ونرى كيفية بناء

مفكوكه الكسري المستمر. أولًا نطبق خوارزمية إقليدس على العددين 92 و73، وستكون النتيجة في هذه الحالة هي:

$$92 = 1 \times \underline{73} + \underline{19}$$

$$73 = 3 \times \underline{19} + \underline{16}$$

$$19 = 1 \times \underline{16} + \underline{3}$$

$$16 = 5 \times \underline{3} + \underline{1}$$

وهكذا نرى أن أكبر عامل مشترك بين 92 و73 هو 1، وهذا يدل على أن الكسر في أقل صورة له. يمكننا الآن بناء مفكوك كسري مستمر للعدد $\frac{92}{73}$ كما يلي. لنبدأ بالسطر الأول من الخوارزمية، فيصبح لدينا:

$$\frac{92}{73} = 1 + \frac{19}{73} = 1 + \frac{1}{\frac{73}{19}}. \tag{9–1}$$

من السطر الثاني نحصل على:

$$\frac{73}{19} = 3 + \frac{16}{19}, \tag{9–2}$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\frac{92}{73} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{16}{19}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{19}{16}}}. \tag{9–3}$$

باستخدام السطر الثالث، نحصل على:

$$\frac{19}{16} = 1 + \frac{3}{16},$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{92}{73} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{3}{16}}},$$

وفي النهاية، من السطر الرابع نحصل على $\frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$؛ ومن ثم فإن:

$$\frac{92}{73} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{3}}}}.$$

وهكذا يتضح لنا أن المفكوك الكسري المستمر للعدد $\frac{92}{73}$ ولأي عدد نسبي، له قسمة واحدة في كل سطر من خوارزمية إقليدس، وَفقًا للعددين. لاحظ أنه، على النقيض من العدد $\sqrt{2}$ وهو عدد غير نسبي، المفكوك الكسري المستمر سوف يتوقف.

الطريقة القياسية عند دراسة المفكوكات من هذا النوع أن نَقصُر اهتمامنا على الكسور المستمرة التي يكون البسط فيها دائمًا 1. ومع ذلك، فإننا تناولنا هنا المفكوكات التي توجد بها أعدد أخرى في البسط، إلا أننا سوف نقيد أنفسنا بالنوع العادي.

ليس هناك ما يمنعنا من القيام بنفس نمط الحسابات لأي عدد غير نسبي موجب وليكن a: كل ما هنالك أننا سنطبق ببساطة خوارزمية إقليدس على زوج الأعداد $(a, 1)$. الفرق هو أننا في هذه الحالة لن نصل أبدًا إلى الباقي 0؛ لأنه إذا حدث أمكننا تنفيذ العملية السابقة للتعبير عن a في صورة كسر مستمر منتهٍ يمكن تبسيطه في صورة كسر عادي، مما يدل على أن a كان عددًا نسبيًّا من الأساس. على أية حال، يمكن أن يظهر نمط متكرر في المفكوك الكسري المستمر، كما رأينا في حالة $\sqrt{2}$. وقد تبين أن الأعداد غير النسبية التي تنتج مثل هذا النمط المتكرر هي بالضبط الجذور غير النسبية للمعادلات التربيعية حيث تكون المعاملات أعدادًا صحيحة. كمثال آخر لننظر للعدد $\sqrt{3}$.

الخطوة الأولى هي كتابة العدد المعطى a على شكل $a = n + r$ حيث n عدد صحيح، وr هو الباقي وهو أقل من 1: وهذا هو السبب أننا كتبنا في المثال الأول: $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$ لأن $1 < \sqrt{2} < 2$؛ ومن ثم يكون $n = 1$ و$r = \sqrt{2} - 1$، وبأخذ $a = \sqrt{3}$ واتباع نمط الحسابات المُعطى في (9-1)، نحصل على:

$$\sqrt{3} = 1 + \left(\sqrt{3} - 1\right) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{(\sqrt{3}-1)}}.$$

باتباع (9-2)، بعد ذلك سنحتاج للتعبير عن $\frac{1}{(\sqrt{3}-1)}$ في صورة $n + r$ أي: عدد صحيح + الباقي. ويتحقق ذلك بحذف الجذر من المقام:

$$\frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

والآن بما أن $2 > \frac{(1+\sqrt{3})}{2} > 1$، فإننا نستطيع أن نكتبها على النحو التالي:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} = 1 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 1 + \frac{1+\sqrt{3}-2}{2}$$
$$= 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

نستطيع الآن التقدم للخطوة المناظرة للخطوة رقم (3-9) السابقة:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{(\sqrt{3}-1)}}}.$$

بالاستمرار بهذه الطريقة نحصل على:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}+2}{2} = \sqrt{3}+1.$$

بكتابة ذلك على الصورة $n + r$ فسنحصل على:

$$\sqrt{3} + 1 = 2 + \left(\sqrt{3} - 1\right).$$

ومن ثم نصل إلى:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1}{(\sqrt{3}-1)}}}}.$$

وبما أن $\sqrt{3}$ هو عدد غير نسبي فإن العملية غير منتهية، ولكننا نحصل على نفس الباقي $(\sqrt{3}-1)$، كما في الخطوات السابقة. ومن ثم تصل العملية إلى نمط متكرر حيث قيمة n تتراوح بين 1 و2:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\cdots}}}.$$

أو في الصورة المختصرة التي سبق تقديمها:

$$\sqrt{3} = \left[1, \dot{1}, \dot{2}\right]. \tag{9-4}$$

بالمثل يمكننا حساب مفكوك الكسر المستمر لكلٍّ من $\sqrt{5}$ و$\sqrt{7}$:

$$\sqrt{5} = \left[2, \dot{4}\right], \quad \sqrt{7} = \left[2, \dot{1}, 1, 1, \dot{4}\right].$$

يعتبر المفكوك الكسري المستمر لعدد ما غنيًّا بالمعلومات.

ويطلق على الكسور الناتجة من إنهاء المفكوك عند أي خطوة تقريبات العدد a. وهي تقترب بالفعل من العدد a، كما يقترح اسمها، معطية تقديرات متناوبة أعلى وأسفل القيمة الدقيقة. وهي أيضًا لها خصائص أخرى جيدة تسمح، مثلًا، باختبار عدم النسبية لأعداد معينة. وكما ذكرنا سابقًا، المفكوكات المتكررة التي يساوي البسط فيها 1 لا تظهر إلا لأعداد من نوع خاص جدًّا، على الرغم من أن بعض الأعداد غير النسبية لها تمثيلات على صورة كسور مستمرة لها نمط خاص. على سبيل المثال، من تطبيقات حاصل ضرب واليس المذكور في الفصل السابع نثبت أن:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}.$$

ولأننا رأينا في الفصل الثاني أنك تستطيع تحويل أي كسر عشري متكرر إلى كسر اعتيادي، فهذا يشجعنا أن نسأل هل يمكننا التحرك في الاتجاه العكسي في هذا السياق الجديد أم لا. على سبيل المثال، مؤكد أن العدد:

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$

أي إن $\alpha = [\dot{1}]$ لا بدَّ أنها حالة خاصة جدًّا. هذا العدد يُسمى: «النسبة الذهبية» ويمكن استخلاصه من مفكوكه الكسري المستمر بسهولة شديدة. الشيء الواجب إيضاحه هو أن

ما يظهر أسفل خط القسمة الأولى هو نسخة أخرى من $\alpha = [\dot{1}]$ بحيث تحقق α المعادلة:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}. \tag{9-5}$$

بضرب طرَفَي المعادلة في α يتبين لنا أنها معادلة تربيعية:

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \Longrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0. \tag{9-6}$$

بحل هذه المعادلة بالصيغة التربيعية نحصل على حلَّين؛ أحدهما موجب والآخر سالب، وبطبيعة الحال، نحن نريد الموجب:

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

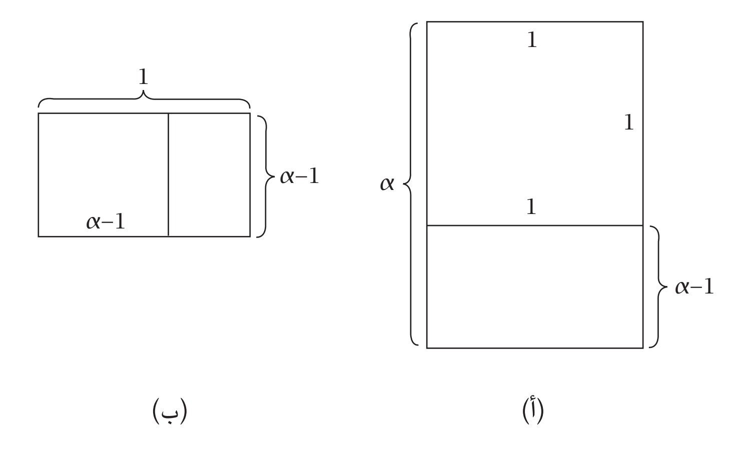
ولا توجد ذروة في هذه العملية؛ إذ إن الإجابة تبدو غير مميزة. وسوف نكتشف المزيد إذا ركزنا على خصائص الرقم بدلًا من التركيز على التعبير عنه بهذه الطريقة. ثمة علاقة أخرى للعدد α تنشأ من خلال طرح 1 من طرفي المعادلة (9-5):

$$\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha}. \tag{9-7}$$

ثم بأخذ معكوس طرفَي المعادلة (9-7) نحصل على:

$$\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}. \tag{9-8}$$

ضع هذا في اعتبارك عندما نفكر في مستطيل أطوال أضلاعه α و1 (انظر شكل ٩-١). وإذا اقتطعنا من هذا المستطيل أكبر مربع ممكن في الجزء (أ)، فسنحصل على مربع 1×1 كما في الشكل، والجزء الباقي سيكون عبارة عن مستطيل له ضلع طوله 1 وحدة وضلع قصير طوله $\alpha - 1$ من الوحدات. هذان المستطيلان في الحقيقة متماثلان: فإذا نظرنا إلى النسبة بين أضلاعهما، فسنجدها على الترتيب $\frac{\alpha}{1}$ و$\frac{1}{(\alpha-1)}$ وتوضح المعادلة (9-8) أن النسبتين متساويتان. وبطبيعة الحال، بما أن المستطيل الصغير له نفس شكل المستطيل الأصلي، إذن فتطبيق العملية نفسها على المستطيل الأصغر (شكل ٩-١(ب)) يؤدي إلى النتيجة نفسها، وهذا يمكن تَكراره إلى ما لا نهاية.



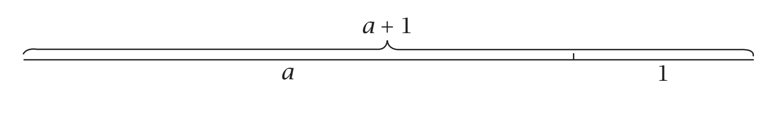
شكل ٩-١

يطلق على مثل هذا المستطيل «المستطيل الذهبي». وقد كانت خصائصه المتميزة مصدرًا لافتتان اليونانيين، حتى إن عالم الرياضيات باتشولي قد ألَّف كتابًا في بدايات القرن السادس عشر عن هذا الموضوع. كثيرًا ما يقال إن المستطيل الذهبي هو ذلك المستطيل الذي يسرك النظر إلى نسب أطوال أضلاعه؛ ومن ثم فإنه مفضل في التصميم. لست متأكدًا من هذه النقطة: فمثلًا شكل بطاقة الائتمان القياسية لا ينطوي على أبعاد ذهبية، ولكنه يقترب منها بشدة. ومع ذلك فأنا أتوقع أن القراء يمكنهم العثور على أمثلة من المستطيل الذهبي مطبقة في أنماط ورق الحائط وفي الهندسة المعمارية وما شابه.

هذه العملية لاستخلاص أكبر مستطيل تساوي أطوال أضلاعه أعدادًا صحيحة من مستطيل تساوي أطوال أضلاعه a و1، تناظر بناء التمثيل الكسري المستمر للعدد a. الاستخلاص الأول يناظر كتابة $a = n_1 + r_1$، حيث r_1 هو طول الضلع الأقصر في المستطيل الباقي. ويمكن اعتبار الخطوة التي يتم فيها قسمة بسط ومقام الكسر الباقي $\frac{r_1}{1} = \frac{r_1}{(n_2 r_1 + r_2)}$ على r_1 اختزالًا للمستطيل الباقي، بحيث يعامل الضلع الأقصر الذي طوله r_1 معاملة الضلع الذي طوله 1. وكان من المعلوم لليونانيين والهنود القدماء أننا إذا أخذنا $a = \sqrt{d}$ لأي عدد صحيح d فإن اثنين من المستطيلات المتبقية سيكونان متماثلين في النهاية؛ ومن ثم فإن الكسر المستمر سيكون من النوع التكراري، على الرغم من أن هذا لم يثبت إلا على يد لاجرانج في القرن الثامن عشر.

هناك حالة هندسية ربما تكون أبسط مما سبق تسمح بظهور النسبة الذهبية، وهي أن تأخذ قطعة مستقيمة وتسأل: ما قيمة a، بحيث إنه إذا حُذف جزء من القطعة المستقيمة بطول a، فإن نسبة a إلى الجزء الباقي من القطعة المستقيمة تساوي نسبة القطعة المستقيمة الأصلية إلى a نفسها؟ (انظر شكل ٩-٢.) فلنفترض أن الجزء الباقي من القطعة المستقيمة طوله 1 وحدة؛ ومن ثم فإن القطعة المستقيمة الأصلية لها الطول $a + 1$. نحن نطلب أن:

$$\frac{a+1}{a} = \frac{a}{1} \Longrightarrow 1 + \frac{1}{a} = a,$$



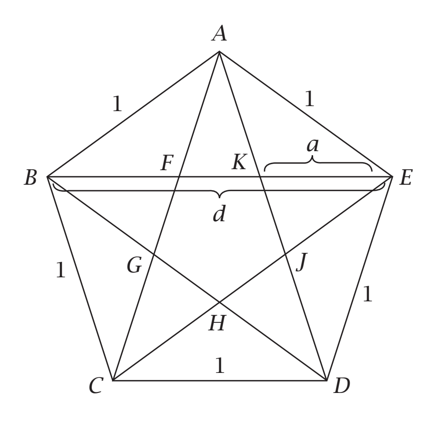
شكل ٩-٢

ووفقًا لذلك نرى أن a تحقق بالفعل المعادلة (9–5) التي تُعيِّن α. في هذا السياق العدد α يُرمز له غالبًا بالقطعة الذهبية.

(١) أهمية الشكل الخماسي المنتظم

المثال الهندسي الثالث الذي تظهر فيه النسبة الذهبية α بشكل مفاجئ هو أقطار الشكل الخماسي المنتظم الذي طول ضلعه الوحدة. في الواقع الطول d لأي قطر من أقطار هذا الخماسي هو النسبة الذهبية. ويوضح شكل ٩-٣، المضلع الخماسي بأقطاره. وكثيرًا ما يصور هذا الشكل على أنه رمز القوة، إن لم يكن الشر. إذ إن الأقطار تمنح الشكل قوته، بينما تمنحه تماثلاته المختفية غموضه. ولنبدأ الآن في دراسة هذا الشكل على نحو أعمق.

تذكر أننا تحدثنا في الفصل الثالث عن نظرية الدائرة التي تنص على أن أي زاويتين محيطيتين تقابلان نفس قوس الدائرة متساويتان في القياس. وبناء عليه، لأي مضلع منتظم له عدد n من الأضلاع، أي زاوية من النوع $\angle ACB$ حيث AB ضلع وC رأس آخر للمضلع، تساوي $\left(\frac{180}{n}\right)^{\circ}$ (انظر شكل ٣-١٧ في الفصل الثالث). بتطبيق هذا على المضلع الخماسي، نجد أن الزوايا أمثال $\angle BAC$ و$\angle CAD$ كلها تساوي $36^{\circ} = \left(\frac{180}{5}\right)^{\circ}$. في نفس



شكل ٩-٣

الفصل رأينا أن مجموع زوايا أي مضلع يساوي $(n-2) \times 180^\circ$، أي إن كلًّا منها لها القياس $\frac{n-2}{n} \times 180^\circ$.

في حالة المضلع الخماسي حيث n تساوي 5، سنجد أن الزاوية $\angle BAE$ تساوي $\frac{3}{5} \times 180^\circ = 108^\circ$. والآن المثلث ABK متساوي الساقين لأن الزاويتين $\angle BAK$ و$\angle BKA$ متساويتان وكلتاهما تساوي 72°.

$$\angle BAK = \angle BAC + \angle CAD = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ;$$

$\angle ABK = 36^\circ$ ومن ثم:

$$\angle BKA = 180^\circ - \angle BAK - \angle ABK = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$

وينتج عن ذلك أن القطعتين المستقيمتين AB وBK يبلغ طول كل منهما الوحدة، والقطعة المستقيمة KE، التي نرمز لها بالرمز a، ترتبط مع القطر d بالعلاقة $d = a + 1$.

بعد ذلك المثلثان ABE وAKE متشابهان لأن كليهما لهما نفس الزوايا $(108^\circ, 36^\circ, 36^\circ)$؛ ومن ثم بأخذ نسب الأضلاع المتقابلة نحصل على $\frac{1}{a} = \frac{d}{1}$ أو التعبير المساوي $ad = 1$. ومن ثم لدينا المعادلتان:

$$d = a + 1, \quad ad = 1.$$

بضرب المعادلة الأولى في d والاستعانة بحقيقة أن $ad = 1$ ، نجد أن:

$$d^2 = ad + d = 1 + d$$

$$\Longrightarrow d^2 - d - 1 = 0,$$

وهي نفس المعادلة (6-9) للنسبة الذهبية α أي إن $d = \alpha$. ومن ثم فإن قطر الشكل الخماسي المنتظم له طول يساوي النسبة الذهبية. علاوة على ذلك، قد اكتشفنا خصائص أخرى للخماسي المنتظم بما فيها خاصية مهمة ممثلة في المعادلة $ad = 1$. وهي تكافئ العبارة التي تنصُّ على أن القطعة المستقيمة BK التي لها الطول 1، هي قطعة ذهبية من القطر BE؛ حيث إنه بما أن $d = \frac{1}{a}$، فيصبح لدينا:

$$\frac{d}{BK} = \frac{d}{1} = \frac{1}{a} = \frac{BK}{a}.$$

والعبارة:

$$\frac{d}{BK} = \frac{BK}{a}.$$

تقول بالضبط إن القطعة BK من القطر $BE = d$ هي قطعة ذهبية.

الخلاصة، أن طول كل قطر في الشكل الخماسي المنتظم هو نسبة ذهبية في حين تتقاطع الأقطار أحدها مع الآخر في القطعة الذهبية.

(٢) أرانب فيبوناتشي والنسبة الذهبية

ترجع مسألة أرانب فيبوناتشي لبداية القرن الثالث عشر. وقد قدمت متتابعة من الأعداد التي تُنتَج بطريقة بسيطة وطبيعية للغاية، تجعل من السهل أن تظهر مرة أخرى. ومع ذلك، فظهورها المتكرر في الظواهر الطبيعية وبخاصة المواقف التي تنطوي على النمو، ظهور لافت للنظر. وفي الواقع، يعتبر الموقف الأصلي الذي ظهرت فيه هذه المتتابعة هو مسألة التعداد التالية.

فلنبدأ بقاعدة. كل زوج من الأرانب يلد زوجًا آخر في الجيل الثاني وزوجًا ثانيًا في الجيل الثالث، وبعد ذلك يصبح عجوزًا فيتوقف عن التناسل.

الجيل الأول يتكون من زوج واحد؛ والجيل الثاني يتكون أيضًا من زوج واحد (جديد)، ولكن في الجيل الثالث، سيولد زوجان لأن زوجَي الأرانب من الجيل الأول والثاني كليهما يلدان. أما الجيل الرابع، فسيولد به ثلاثة أزواج: زوجان منهما من نسل أبناء الجيل الثالث والزوج الثالث من نسل الجيل الثاني. ويكون الاثنا عشر عددًا الأولى لفيبوناتشي، أي عدد الأزواج في كل جيل، على النحو التالي:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

هل يمكنك أن ترى نمطًا؟ لن تكون بالضرورة قادرًا على أن ترى النمط، على الأقل ليس بالسهولة التي رأيت بها المتتابعات العددية التي قابلناها حتى الآن. لا توجد صيغة «سهلة» تربط f_n، الحد الذي ترتيبه n في هذه المتتابعة، بالعدد n نفسه (بالرغم من وجود صيغة معقدة). ومع ذلك فهذه متتابعة سهلة التوليد بسبب الملاحظة التالية. لتكن f_n عدد الأرانب التي ولدت في الجيل الذي ترتيبه n. والجيلان الوحيدان القادران على التناسل في أي جيل معين هما الجيلان السابقان لهذا الجيل. وكل زوج وُلد في الجيل الذي ترتيبه $n-2$، والذي يوجد فيه f_{n-2} من الأزواج، وكل زوج من الجيل السابق الذي ترتيبه $n-1$ ويضم f_{n-1} من الأزواج، يسهم بزوج واحد في الجيل الذي ترتيبه n. ومن ثم نستطيع أن نقول إن:

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \ \ n \geq 3.$$

وهذا يتيح لك بالتأكيد حساب أعداد فيبوناتشي بسهولة شديدة (تحقق من أول 12 عددًا بنفسك)، على الرغم من أن هذه الطريقة تُعرف باسم التكرارية، وهي ليست صيغة؛ لإيجاد f_{100} ستحتاج لإيجاد جميع الأعداد السابقة في المتتابعة أولًا.

ما صلة ذلك بالنسبة الذهبية؟ لا يبدو أن ثمة صلةً واضحة بينهما. فمتتابعة فيبوناتشي طبعًا ليست متتابعة هندسية؛ لأن النسبة بين الحدود المتتالية ليست ثابتة، ومن السهل أن تتأكد من ذلك. ومع ذلك، يجدر بنا أن نصبر قليلًا. إذا حسبت خارج القسمة $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ للعديد من قيم n فستلاحظ شيئًا لافتًا. على الرغم من أنه لا توجد نسبتان متساويتان تمامًا، فإنه بعد وقت ستجدهما متساويتين تقريبًا. وإذا كنت أكثر دقة في الملاحظة، فسوف تلاحظ أنها جميعًا تتقارب إلى القيمة $1.618\ldots$ تقريبًا، أي النسبة

الذهبية. أي إن متتابعة فيبوناتشي تسلك على المدى البعيد سلوك المتتابعات الهندسية بنسبة مشتركة α. فما أسباب ذلك؟

في الحقيقة، بمجرد أن تشك أن هذا صحيح، فستجد أنه سهل بما فيه الكفاية للتفسير، ويمكن استخدام التكرارية لإثباته. بفرض أن $n \geq 3$، سوف نبدأ بالمعادلة $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. قم بالقسمة على f_{n-1} للحصول على:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}.$$

بعد ذلك نكتب $f_{n-1} = f_{n-2} + f_{n-3}$ للحصول على:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-2} + f_{n-3}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{f_{n-3}}{f_{n-2}}},$$

حيث قسمنا البسط والمقام على f_{n-2} لنحصل على المتساوية الأخيرة. نستمر بالتعويض عن f_{n-2} بـ $f_{n-3} + f_{n-4}$ ثم نقسم البسط والمقام الخاص بالكسر الناتج على f_{n-3} لنحصل على:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{f_{n-4}}{f_{n-3}}}}.$$

من خلال الاستمرار على هذا النحو سنتوصل في النهاية إلى كسرٍ مستمر منتهٍ يتكون بالكامل من رقم 1 متكرر حيث إن نسبة فيبوناتشي النهائية هي $1 = \frac{1}{1} = \frac{f_2}{f_1}$. ونستنتج من ذلك أن نسب أعداد فيبوناتشي المتتالية تقابل بالفعل المفكوك المقتطع الكسري المستمر للنسبة الذهبية α كما في المعادلة رقم (5-9). والقيمة النهائية لهذه النسبة هي α نفسها ومن ثم فإن قيمة النسبة $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ تَئول إلى α لقيم n الكبيرة.

إرضاءً لفضول القراء سوف أُنهي هذا الجزء من المناقشة بالجملة الخاصة بصيغة عدد فيبوناتشي الذي ترتيبه n وهي صيغة تبدو غريبة بعض الشيء:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \qquad (9\text{-}9)$$

تبدو هذه الصيغة مخيفة عند رؤيتك لها لأول مرة: فرغم كل شيء، ليس هناك سبب واضح لماذا يمكن أن نكتشف أن هذا التعبير المعقد في الطرف الأيمن يمكن أن يساوي عددًا صحيحًا، فما بالك بعدد فيبوناتشي الذي ترتيبه n. ومع ذلك، سوف تلمح الوجود المطمئن للنسبة الذهبية في الصيغة. بل إننا سنرى كلا جذرَي المعادلة التربيعية الذهبية $x^2 = x + 1$، فلنطلق على هذين الجذرين α، أي النسبة الذهبية، و$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

يمكن التحقق من هذه الصيغة بالاستعانة بحجة استنتاجية. سوف نتأكد من أن الصيغة تصلح للتعامل مع $n = 1$ و$n = 2$ ثم نستخدم تكرارية فيبوناتشي لإثبات أن الصيغة ستظل صالحةً عند كل خطوة. الحجة واضحة ومباشرة بما فيه الكفاية وتستغل حقيقة أن كلًّا من العددين α وβ يتمتَّع بخاصية مميزة وهي أنهما يحققان المعادلة التربيعية $x^2 = x + 1$. ومع ذلك، فهذا لا يفيد في تفسير كيفية اكتشاف هذه الصيغة في المقام الأول! ولكن تأكد أن هناك تقنية قياسية لإيجاد صيغ لكل التكراريات من نوع فيبوناتشي يمكن من خلالها حل هذه المسألة.

فيما تستخدم مثل هذه الصيغة المعقدة على أي حال؟ لا تستخدم لحساب أعداد فيبوناتشي؛ فإذا رغبت في إيجاد f_{100} فمن الأسهل بالنسبة لك أن تستخدم التكرارية مرارًا بدلًا من أن تستخدم مثل هذه الصيغة الصعبة. ومع ذلك، فهذه الصيغة لها استخدام نظري. على سبيل المثال، رغم أنني لن أستعرض هنا أي تفاصيل، يمكنك بسهولة استخدام الصيغة لإثبات أن النسبة $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ تَئول إلى النسبة الذهبية كلما زادت قيمة n.

(٣) متتابعة البابا

في الجزء التالي لديَّ نوع مختلف تمامًا من ظاهرة فيبوناتشي. ابدأ بحرفين J وP واجعلهما أول «كلمتين» في متتابعة من الكلمات تكونت وفقًا لقاعدة فيبوناتشي: كل كلمة في المتتابعة تكونت بلصق الكلمتين السابقتين في كلمة واحدة. المتتابعة تبدأ هكذا:

$$J, P, JP, PJP, JP^2JP, PJPJP^2JP, JP^2JP^2JPJP^2JP, \ldots,$$

حيث P^2 تعني PP. استوحت هذه المتتابعة اسمها من اسم البابا يوحنا بولس الأول في ١٩٧٨؛ فالبابا اتخذ اسمه من اسمَي اثنين من أسلافه السابقين بهذه الطريقة. ومتتابعة البابا هذه هي المتتابعة التي ستنتج إذا شعَر خلفاؤه بالاضطرار إلى أن يحذوا حذوه في

هذا الصدد. على أية حال، منذ ذلك الحين أصبحت متأكدًا أن هذه المتتابعة تنشأ طبيعيًّا في مجالات متنوعة؛ مثل نظرية اللغات المجردة في علوم الكمبيوتر ودراسة البلورات. وسوف أكتفي بتوضيح بعض الأوجه المهمة لهذه المتتابعة من الكلمات محاولًا تقديم وصف منطقي للاسم P_n للبابا الذي ترتيبه n.

إذا بدأنا ترقيم المتتابعة عن طريق أخذ الكلمة الأولى لتكون JP (بالنظر إلى J وP كمولدات) فيمكننا بسهولة أن نرى أن عدد كلمات J في الكلمة P_n التي ترتيبها n هو عدد فيبوناتشي f_n الذي ترتيبه n، بينما عدد كلمات P في الكلمة P_n التي ترتيبها n هو في الحقيقة f_{n+1}؛ ومن ثم فطول P_n هو $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$. كما أنه ليس من الصعب أن ندرك أنه إذا كان $m \le n$ فإن P_n سوف ينتهي بـ P_m. وبما أن الكلمات في متتابعة البابا دائمًا ما تنتهي بـ JP ولا تبدأ أبدًا بـ P^2 (فهي تبدأ إما بـ JP أو PJ)، إذن فـ P_n لا يمكن أن تحتوي على كلمتَي J متتاليتَين أو على ثلاث كلمات P متتالية.

لنرمز لعكس P_n بالرمز ${P^*}_n$، يمكننا تعريف متتابعةٍ لا نهائية من الحروف A بالوضع في الاعتبار الترتيب العكسي لمتتابعة البابا:

$$A = PJP^2JPJP^2JP^2JP\ldots$$

هذا له معنًى؛ لأن عكس متتابعة البابا «ثابت» بمعنى أنه لأي عدد صحيح k فإن آخر عدد k من الكلمات في متتابعة البابا دائمًا ما يكون ثابتًا من نقطة ما في المتتابعة فصاعدًا.

إذا استطعنا توليد المتتابعة A، فيمكننا إيجاد الاسم P_n: كل ما علينا هو أن نأخذ أول عدد f_{n+2} من حروف A وهذا سوف يعطينا ${P^*}_n$.

من الأسهل أن نتابع العملية باستبدال حروف A بالأعداد 0 و1 و2، حيث يستخدم 0 بدلًا من J، و1 بدلًا من P، و2 بدلًا من P^2. وفي هذه الحالة تتكون المتتابعة A من الأعداد 1 و2 يفصل بينها أعداد 0؛ علاوة على ذلك، نحن نعرف أن 00 مستحيلة الحدوث ونعرف أن المتتابعة A لا بدَّ أن تبدأ بالعدد 1. في ضوء هذه الملحوظات يمكن إعادة تكوين A إذا علمنا كيفية توليد نمط تكرار العددين 1 و2. لتكن B هي المتتابعة المشتقة من A بعد حذف جميع الأصفار. فنجد أن B يمكن أن يتم توليدها باستخدام قاعدتين بسيطتين.

لتكن B_0 متتابعة مكوَّنة فقط من الرمز 1. يمكننا أن نكوِّن أيضًا المتتابعات B_1 وB_2، إلخ باستخدام قواعد إعادة الكتابة التالية:

$$1 \longrightarrow 12, \quad 2 \longrightarrow 122.$$

وهي تعني: كلما رأينا 1 استبدلنا به 12؛ وكلما رأينا 2 استبدلنا به 122. أول أربع متتابعات B_i هي:

$$B_1 = 12, \quad B_2 = 12\ 122, \quad B_3 = 12\ 122\ 12\ 122\ 122,$$

$$B_4 = 12\ 122\ 12\ 122\ 122\ 12\ 122\ 12\ 122\ 122\ 12\ 122\ 122.$$

تحمل المتتابعات B_i المعلومات التي تسمح باستدعاء اسم البابا الذي ترتيبه $2i+1$. فمثلًا للحصول على P_7 نحتاج إلى $B_3 = 121221122122$. وفيما يلي الطريقة:

قم بعكس B_3، ثم أدخل 0 في البداية وبين كل زوج من الرموز 1 و2، وأخيرًا قم بالتحويل إلى J وP وP^2 مرة أخرى، لتستعيد الاسم:

$$B_3^* = 2212212122121 \longrightarrow 0202010202010201020201020 1$$

ومن ثم:

$$P_7 = JP^2JP^2JPJP^2JP^2JPJP^2JPJP^2JP^2JPJP^2JP.$$

(٤) المجسمات المنتظمة الخمسة والنسبة الذهبية

سنختتم حديثنا بمثال من العصور القديمة، على الرغم من أن الربط بالنسبة الذهبية كان نتاج رياضيات عصر النهضة.

ثلاثي الأبعاد المناظر للمضلع المنتظم هو متعدد السطوح المنتظم، وهو شكل محدود بمضلعات منتظمة متطابقة حيث عدد السطوح متساوٍ عند أي ركن. على سبيل المثال، المكعب هو متعدد سطوح منتظم له وجوه مربعة الشكل. بالطبع يمكن أن توجد مضلعات منتظمة لها أي عدد من الأضلاع، ولكن متعددات السطوح أكثر ندرة. ففي الحقيقة يوجد خمسة أشكال منتظمة متعددة السطوح فقط.

كم عدد متعددات السطوح التي يمكن تخيل وجودها والتي تكون وجوهها على شكل مثلثات منتظمة (أو بعبارة أخرى متساوية الأضلاع)؟ عند كل ركن من أركان متعدد السطوح هذا يمكن أن يوجد ثلاثة أو أربعة أو خمسة مثلثات متلاقية ولكن لا يمكن أن يوجد ستة مثلثات؛ لأن مجموع الزوايا عند كل ركن ستساوي $6 \times 60^\circ = 360^\circ$ ومن

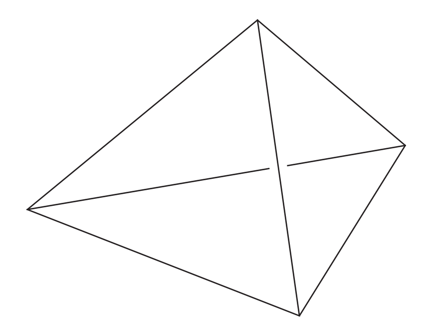
ثم سيكون هذا الركن مستويًا. (من الواضح أن وجود أكثر من ستة مثلثات متساوية الأضلاع عند كل رأس أمر مستحيل الحدوث.)

باستخدام المربعات، رأينا بالفعل أنه يمكن أن يوجد ثلاثة مربعات تلتقي عند كل ركن وهذا يعطي مكعبًا، ولكن مرة أخرى، سوف يؤدي وجود أربعة مربعات إلى أن يكون هذا الركن مستويًا، ومن المستحيل أن يوجد أكثر من أربعة.

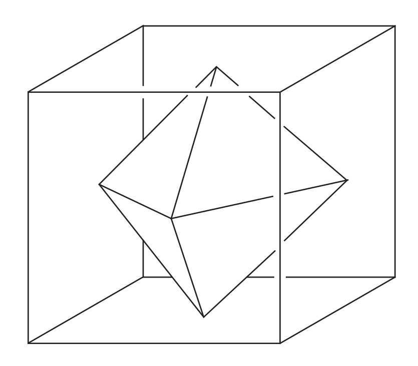
الزاوية الداخلية للخماسي المنتظم تساوي 108°؛ ومن ثم يبدو أنه من الممكن تكوين متعدد سطوح منتظم باستخدام أشكال خماسية متطابقة كسطوح، بحيث يلتقي عند كل ركن ثلاثة أشكال خماسية، ولكن ليس أكثر من ثلاثة. أمَّا سداسي الأسطح فهو مستحيل لأن زاويته الداخلية تساوي 120°؛ ومن ثم فالتقاء ثلاثٍ منها عند ركن واحد لن يحدث أبدًا إلا فقط في السطح المستوي، في حين أن الأكثر من ذلك غير ممكنٍ على الإطلاق. بالنسبة لمتعددات السطوح ذات سبعة الأضلاع أو أكثر، من الواضح أنه لا يوجد أمل، لأن الزوايا الداخلية لهذه المضلعات تزيد على 120°.

هل هذه الاحتمالات الخمسة يمكن تحقيقها؟ لنفحص الحالات الثلاث التي تشترك فيها مثلثات متساوية الأضلاع. مما لا شك فيه أن متعددَ السطوح الذي تلتقي فيه ثلاثة مثلثات متساوية الأضلاع عند كل ركن؛ مشهورٌ للغاية: ويطلق عليه رباعي السطوح المثلثية أو الهرم الثلاثي (شكل ٩-٤). ومن الممكن أيضًا أن تلتقيَ أربعة مثلثات عند كل ركن، وفي الحقيقة يمكن توليد هذا المجسم من أي مكعب: بتوصيل مراكز وجوه المكعب التي تشترك في نفس الحرف، وستكون النتيجة هي ثُماني السطوح (انظر شكل ٩-٥). ويعد ثُماني السطوح هو متعدد السطوح المزدوج للمكعب. (الازدواجية هي طريق ذو اتجاهين: إذا أوصلنا مراكز أوجه ثماني السطوح التي تشترك في حافة مشتركة، سينتج لدينا مكعب.)

قد يحاول المنتبهون منكم لطريقة تفكير علماء الرياضيات فعل المزيد بفكرة الازدواجية هذه. فهل يمكن أن نحصل على متعدد سطوح منتظم بأخذ رباعي السطوح المثلثية المزدوج؟ الإجابة نعم، ولكن ربما يكون من المخيب للآمال أن رباعي الأسطح المثلثية ذاتي الازدواج؛ إذ إن توصيل مراكز وجوه رباعي الأسطح لا يعطينا إلا رباعي أسطح آخر بداخله (شكل ٩-٦). تذكر هذه الفكرة على أية حال. على الرغم من أن المجسمات المنتظمة الخمسة كانت كائنات رياضية أخذت مكان الصدارة في أعمال إقليدس، فإن لوكا باتشولي صديق ليوناردو دافنشي هو الذي وجد بمهارة طريقة بناء مجسم منتظم تلتقي فيه



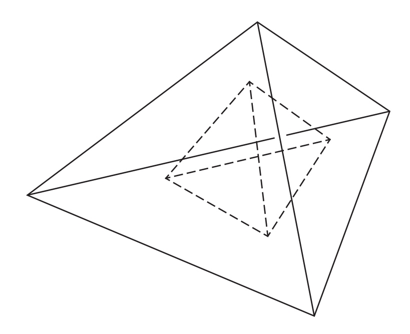
شكل ٩-٤



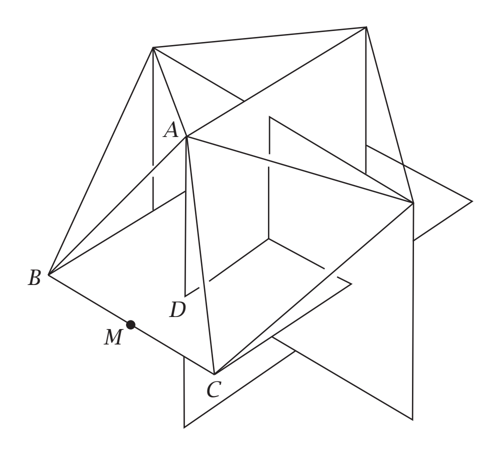
شكل ٩-٥

خمسة مثلثات عند كل رأس من رءوسه. ما علينا إلا أن ندرس تقاطع ثلاثة مستطيلات ذهبية كما في الصورة التي ظهرت في كتاب جون ستيلويل الشهير «الرياضيات وتاريخها» (انظر شكل ٩-٧). تُكوِّن الأركان الاثنا عشر مجسمًا له 20 وجهًا مثلثيًّا؛ حيث يوجد خمسة أوجه عند كل ركن. لقد رسمتُ خمسة مثلثات متساوية الأضلاع مرتبطة صراحة بركن واحد في الصورة. ولأن هناك 12 ركنًا، كلٌّ منها يتصل بخمسة مثلثات، ولأن كل مثلث يشتمل على ثلاثة أركان باعتبارها رءوسه؛ ومن ثم نجد أن المجسم الناتج سيشتمل على $20 = \frac{(12\times5)}{3}$ وجهًا مثلث الشكل.

يبقى التأكد من أن كل هذه المثلثات متساوية الأضلاع: في الحقيقة طول ضلع المثلث النموذجي ABC يساوي 1، كما يكشف تطبيقان من تطبيقات فيثاغورث. تذكر أنه في



شكل ٩-٦



شكل ٩-٧

كل مستطيل طول الضلعين القصيرين يساوي 1 بينما طول الضلعين الطويلين يساوي α، أي النسبة الذهبية، وأن α لها خاصية أن $\alpha^2 = 1 + \alpha$. لتكن M هي نقطة المنتصف للضلع BC وD هي النقطة التي يلتقي عندها المستطيلان اللذان يحدد أركانهما المثلث ABC، كما هو موضح في شكل ٩-٧. أولًا، من فيثاغورث:

$$AM^2 = MD^2 + AD^2.$$

فيكون $MD = \frac{(\alpha-1)}{2}$ و $AD = \frac{\alpha}{2}$. ولذلك:

$$(\alpha - 1)^2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha + 1 - 2\alpha + 1 = 2 - \alpha.$$

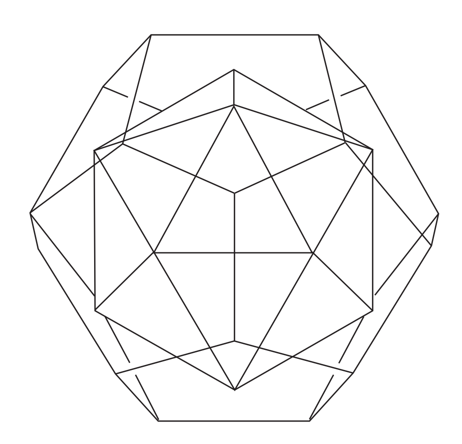
ولهذا نحصل على:

$$AM^2 = MD^2 + AD^2 = \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{2-\alpha}{4} + \frac{1+\alpha}{4} = \frac{3}{4}.$$

وباستخدام نظرية فيثاغورث مرة ثانية، نصل إلى:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

أي إن طول AB يساوي وحدة واحدة، كما هو الحال لباقي أضلاع المثلثات في الصورة، وهذا يدل على أن المثلثات متساوية الأضلاع حقًّا. ويطلق على المجسم المنتظم المكون من 20 مثلثًا متساوي الأضلاع عشريني الأسطح.



شكل ٩-٨

للوصول إلى المجسم المنتظم الخامس والأخير نعود لفكرة الازدواجية (المرافقة). المكعب له ستة أوجه ومن ثم فإن المزدوج (المرافق) الخاص به، أي الثماني الأسطح، له

6 أركان، واحد لكل وجه من أوجه المكعب، وهذه الأوجه هي عبارة عن مثلثات متساوية الأضلاع، لأن المكعب له ثلاثة أوجه تلتقي عند كل ركن من أركانه. وبنفس الطريقة فإن المزدوج (المرافق) الخاص بعشريني الأسطح، ويطلق عليه «المجسم ذو الاثني عشر وجهًا»، له ركن واحد لكل وجه من العشريني الأسطح، أي إن له 20 ركنًا في المجمل. ونظرًا لأن خمسة أوجه تلتقي عند كل ركن من المجسم العشريني الأسطح، فإن هذا يجعل وجوه الشكل المزدوج خماسية الأضلاع؛ ومن ثم يكون المجسم الاثنا عشري مجسمًا منتظمًا خماسي الأوجه. كل وجه من المجسم العشريني الأسطح متصل بثلاثة وجوه أخرى، بحيث تلتقي ثلاثة وجوه (سطوح) من المجسم ذي الاثني عشر وجهًا عند كل ركن من أركانه. ويوضح شكل ٩-٨ الزوج النهائي المرافق للمجسمات المنتظمة.

ولذلك نرى أنه يوجد خمسة مجسمات منتظمة، مع أنه لا يزال من المتصور أنه قد يوجد أكثر من ذلك؛ على سبيل المثال، كيف نعلم أنه لا يوجد مجسم منتظم آخر له خمسة أوجه مثلثية تلتقي عند كل رأس وعدد من الأحرف والأوجه مختلف عن المجسم العشريني الأسطح؟ سنعرف السبب في عدم وجود مثل هذا الكائن في الفصل الأخير من الكتاب.

الفصل العاشر

الشبكات

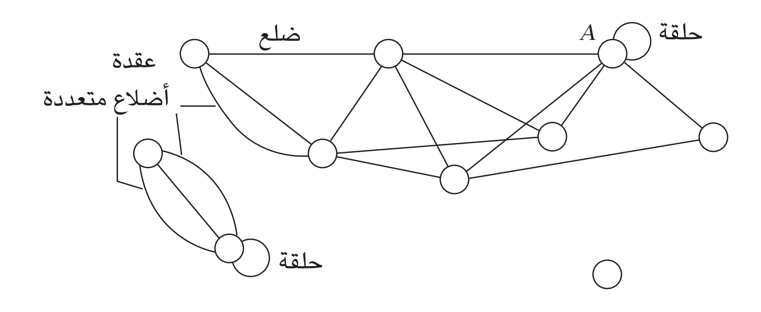
في المسألة التاسعة الواردة في الفصل السادس رأينا أن شبكة جسور كونيجزبرج لا يمكن عبورها مرة واحدة فقط لأن هذه الشبكة بها الكثير جدًّا من النقاط الفردية، أي العُقد المتصلة بعدد فردي من الأضلاع. وسندرس الآن هذا النوع من المسائل بشكل عام.

نحن نعني بكلمة «شبكة» أي مجموعة من العُقد (تُسمى أحيانًا رءوسًا وأحيانًا أخرى مجرد نقاط) وأضلاع تصل بين هذه العُقد. سوف نسمح للعديد من الأضلاع أن تربط بين نفس الزوج من العُقد (متعدد الأضلاع)، كما نسمح بوجود الحلقات، وهي أضلاع تبدأ وتنتهي عند نفس العُقدة. علاوة على ذلك، بشكل عام ليس من الضروري أن تتكون الشبكة من قطعة واحدة متصلة، لكن يمكن أن تتكون من عدد من المُركبات. وقد تمر أضلاع الشبكة بعضها ببعض، وطبعًا في حالة وجود أضلاع كثيرة لا يمكن تجنب ذلك. وعلى الرغم من ذلك، إذا أمكن رسم الشبكة دون أن تمر الأضلاع بعضها ببعض، في هذه الحالة تسمى الشبكة «شبكة مستوية». وتتضح كل هذه السمات في شكل ١٠-١.

هناك ملاحظة واحدة تنطبق على الكثير من الشبكات بصفة عامة. نعني بدرجة العقدة عدد الأضلاع المرتبطة بهذه العقدة (وتحسب الحلقة بضلعين). فمثلًا العُقدة A في المثال السابق لها الدرجة 6. وإذا جمعنا كل درجات العُقد في الشبكة، فسوف نحصل على عدد s يساوي بالضبط ضعف عدد الأضلاع e؛ لأن كل ضلع يساهم بـ 2 في المجموع الكلي؛ لأنه يصل بين عقدتين فيحسب مرتين. في المثال الموضح في شكل ١٠-١، عدد الأضلاع يساوي إجمالًا 18 ضلعًا، وبجمع درجات العقد نحصل على:

$$(3+5+6+5+4+3+2)+(3+5)+0 = 28+8+0$$
$$= 36 = 2 \times 18,$$

وهو ما يتفق مع ملاحظتنا العامة أن $s = 2e$.



شكل ١٠-١

لنرمز بـ s_e لمجموع درجات كل العُقد الزوجية (أي العُقد ذات الدرجة الزوجية)، وs_o لمجموع درجات العقد الفردية المناظر.

$$s_e + s_o = s = 2e.$$

ومن ثم فإن $s_o = 2e - s_e$. والآن بما أن s_e هو مجموع أعداد زوجية، إذن فهو بالضرورة زوجي، وكذلك $2e$؛ ومن ثم فإن s_o عدد زوجي أيضًا. وبما أن s_o هو مجموع أعداد فردية، فهذا غير ممكن إلا إذا كان عدد الأعداد المجموعة في المجموع s_o هو أيضًا عدد زوجي؛ بمعنى أن العدد الفعلي للعُقد الفردية في الشبكة يجب أن يكون عددًا زوجيًّا. ونستنتج من ذلك أن أي شبكة لا بدَّ أن تتكون من عدد زوجي من العُقد ذات الدرجة الفردية. (في المثال السابق يوجد 6 عُقد فردية.) هذه الحقيقة، التي يُطلق عليها أحيانًا تمهيدية المصافحة، مفيدة للغاية: ومن المهم أن ندرك إدراكًا كاملًا أنها صحيحة. فهي تخبرنا مثلًا أنه من المستحيل تكوين شبكة من 5 عُقد حيث كل عُقدة لها درجة 3. إذا حاولت تكوين مثل هذه الشبكة فلن تنجح في ذلك على الإطلاق، وهو ما تؤكده تمهيدية المصافحة.

(١) إعادة النظر في مسألة كونيجزبرج

سوف نبحث الآن في سؤال عبور شبكة كونيجزبرج؛ أي مسألة إيجاد مسار عبر الشبكة نمرُّ فيه بكل ضلع مرة واحدة فقط.

الحُجة التي قدَّمناها فيما يخص جسور كونيجزبرج توضح أنه لتكون الشبكة N قابلة للمرور عبرها، فإنها يجب ألا تحتوي على أكثر من عقدتين فرديتين، ويجب أن

تكونا عند طرفَي مسار المرور. أما إذا طالبنا بالمزيد وتطلعنا لمرور دائري، أي إن مسار المرور يبدأ وينتهي عند نفس العُقدة، فإن حجة التزاوج الواردة في الفصل السادس، توضح أن هذا سيكون مستحيلًا إلا إذا كانت كل العُقد زوجية الدرجة. (المسار الدائري يجب أن يصل إلى أي عقدة ويغادرها عددًا متساويًا من المرات؛ ومن ثم يجب أن يكون عدد الأضلاع المرتبطة بالعُقد زوجيًّا.) وقد تبين أن هذا الشرط الضروري هو أيضًا كافٍ للمرور عبر الشبكة المتصلة N؛ أي إن N يمكن المرور عبرها إذا — وفقط إذا — كانت جميع العُقد زوجية. (ومن الواضح أننا من المستحيل أن نمر عبر شبكة تشتمل على عدة مكونات غير متصلة.)

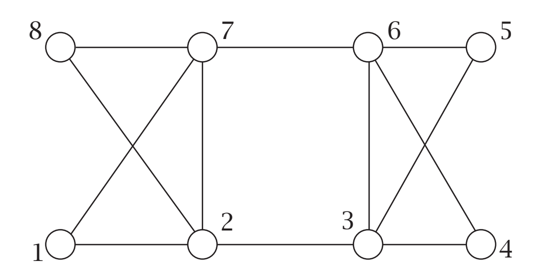
هل يمكن أن نجد طريقة للقيام بذلك فعلًا؟ هل يمكن أن ينجح أي شيء؟ ربما إذا كان لدينا مثل هذه الشبكة N ويمكننا السير عبرها بأي شكل، باستخدام ضلع جديد في كل نقطة التقاء، فسوف نجد أنفسنا في نهاية الأمر حيث بدأنا وقد استخدمنا جميع الأضلاع. هذا النهج بسيط في التفكير ولا يصلح دائمًا؛ فإذا لم تكن حذرًا فستصبح في مأزق.

خذ المثال التالي (شكل ١٠-٢). هذه شبكة متصلة تتكون من عقد جميعها ذات درجة زوجية. ومع ذلك، إذا بدأنا السير من العُقدة 7 وكان المسار $7 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2$، فسوف نوقع أنفسنا في مأزق. إذا كان لنا أن نتصور حرق الجسور التي سرنا عليها، فلدى وصولنا إلى 2 فإن الشبكة المتبقية سوف تنقسم إلى مكونين، وسنكون قد حوصرنا في الناحية اليسرى. ومع ذلك فهذه هي الصعوبة الوحيدة التي يمكن أن تنشأ ويمكننا تفاديها بسهولة. لسنا مضطرين إلى أن نكون في منتهى المهارة عندما نحدد مسارنا، ولسنا مضطرين إلى أن نأخذ في اعتبارنا الخطوتين التاليتين — كل ما نحتاج إليه هو أن نتجنب اتخاذ خطوة تؤدي إلى انقسام الشبكة المتبقية إلى اثنتين. يمكننا بالفعل إعطاء خوارزمية لعمل ذلك، أو بعبارة أخرى صياغة عملية ميكانيكية نتجنب بها ضرورة اتخاذ القرار السليم أو التميز بذكاء نادر.

ابدأ عند أي عُقدة للمرور عبر الشبكة بالطريقة التي تحلو لك، ولكن:

(١) ارسم صورة للشبكة واحذف أي ضلع استخدمته وأي عُقدة مررت بكل الأضلاع المتصلة بها.

(٢) في كل خطوةٍ لا تستخدم ممرًّا، أي ضلعًا يصل بين جزأين لم يكونا ليتصلا من غيره، إلا إذا كان لا يوجد أي اختيار آخر.



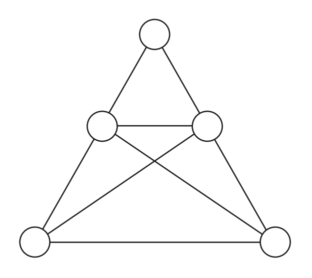
شكل ١٠-٢

لن تجد الآن أي صعوبة في المرور عبر الشبكة السابقة، بادئًا عند أي عُقدة تريدها. (لاحظ أن الخطوة الثالثة $2 \longrightarrow 3$ من المسار الفاشل الذي اتخذناه تنتهك القاعدة الثانية عن طريق استخدام ممر.)

إذا كانت الشبكة المتصلة بها عُقد ذات درجة فردية، فإنه يجب، بمقتضى «تمهيدية المصافحة» أن يكون عددها على الأقل 2. فإذا كان هناك أكثر من اثنتين، نعلم أنه لا يوجد مسار للمرور عبرها؛ ولكن ماذا لو كان هناك بالضبط عُقدتان ذواتا درجةٍ فردية؟ فهل يمكن استخدام الطريقة السابقة لإنتاج مسار للمرور حتى لو لم يكن دائريًّا؟ الإجابة: نعم، وسوف نشرح الآن.

يمكننا أن نمر عبر الشبكة مبتدئين عند أيٍّ من العُقدتين الفرديتين ومنتهين عند الأخرى. فلنسمِّ العُقدتين الفرديتين A وB على الترتيب. ارسم ضلعًا آخر e في الشبكة من A إلى B. في هذه الشبكة المعدلة حتى الآن جميع العُقد زوجية الدرجة؛ ومن ثم الخوارزمية السابقة تسمح لنا بإيجاد دائرة للمرور عبرها، بَدءًا من B، ويمكن أيضًا الإصرار على أن يكون الضلع الجديد e الذي أضفناه هو الأول في الاستخدام. ومن ثم فهذه الدائرة ستتكون بالسير من B إلى A عبر e والباقي لا بدَّ أن يكون مسارًا للمرور من الشبكة الأصلية التي تبدأ عند A وتنتهي عند B. فكر في المثال التالي الذي يحتوي على عقدتين من العقد الفردية، كما هو موضح في شكل ١٠-٣.

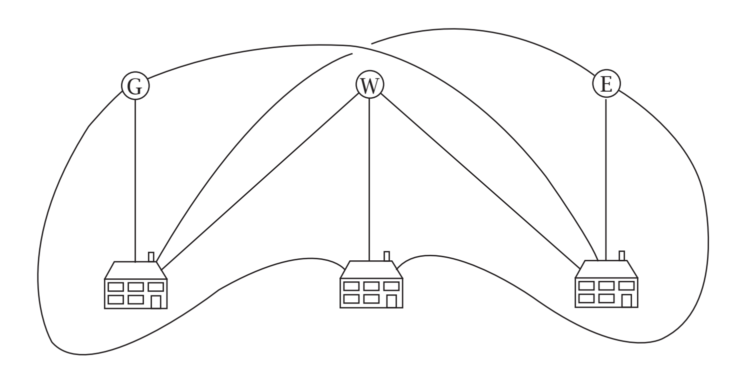
يمكنك العثور على البرهان أن الخوارزمية السابقة صالحة دائمًا في أي كتاب جاد عن الشبكات ونظرية المخططات، وهو الاسم الذي يطلق غالبًا على دراسة الشبكات. وستجد أن البرهان ليس صعبًا ولا طويلًا ولكنه مزعج قليلًا إذا أصررت على تبرير كل التفاصيل، وهو ما لا تفضل الكثير من الكتب الخوض فيه حتى لا تفسد بساطة الفكرة.



شكل ١٠-٣

(٢) تقاطع الأسلاك: هل يمكن تفاديه؟

النوع الثاني من مسائل الألغاز التي ترتبط بالشبكات هو عندما يطلب منك رسم شبكة تشتمل على روابط معينة بحيث تكون الأضلاع غير متقاطعة. ينطوي المثال القياسي على ثلاثة منازل يجب إمدادها بمنافذ للغاز والماء والكهرباء. لتقليل احتمالية أن تقطع إحدى الخدمات إمداد الخدمات الأخرى أثناء الصيانة، سيكون من الأفضل أن تُوضع الوصلات بحيث لا تعبر خطوط الإمداد بعضها فوق بعض. فهل يمكن عمل ذلك؟ ويبين شكل ١٠-٤ شبكة فاشلة كادت تنجح في تحقيق المطلوب.

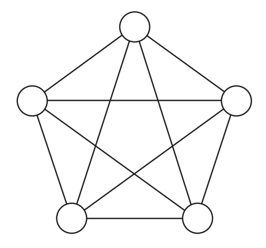


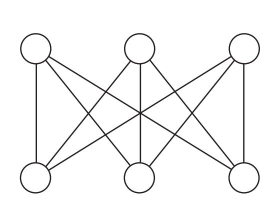
شكل ١٠-٤

بإمكانك أن تصمم شبكة بالجودة نفسها، ولكن ليس بجودة أعلى. فكيف يمكنك إثبات أن هذا مستحيل؟ كيف يمكننا التأكد من أنه لا توجد طريقة ماهرة لفعل ذلك

ولكننا لم نتمكن من اكتشافها؟ الصعوبة لا تكمن كثيرًا في كون المسألة معقدة في الأساس، ولكنها تكمن في أن المرء، بصرف النظر عن المبرر، سيحتاج إلى التأكيد على أنه من الواضح أن أحد الأضلاع لا بدَّ أن يمرَّ فوق ضلع آخر لأنه يجب أن يمر من داخل تكوين معين قامت الأضلاع الأخرى بإنشائه إلى خارجه. ولا حرج في ذلك، إلا أنه من الصعب جدًّا تبرير ذلك بشكل دقيق نظرًا لصعوبة التعامل مع المنحنيات المغلقة حتى البسيط منها في التصميم الكامل للشكل.

في الحقيقة، توجد شبكتان أساسيتان غير مستويتين؛ بمعنى أنه لا يمكن رسمهما بدون أن يلتقيَ زوج واحد على الأقل من الأضلاع عند نقطة ليست عُقدة في الشبكة. الأولى التي سبق أن ذكرناها هي $K_{3,3}$ وهي الشبكة التي تنشأ من توصيل كل عقدة في مجموعة مكونة من ثلاث عُقد بمجموعة أخرى مكونة من ثلاث عُقد. أما الثانية فهي K_5 التي تسمى الشبكة الكاملة على 5 عقد: تحتوي الشبكة الكاملة على n عقد على ضلع واحد يصل بين كل زوج من العُقد (انظر شكل ١٠-٥).





شكل ١٠-٥

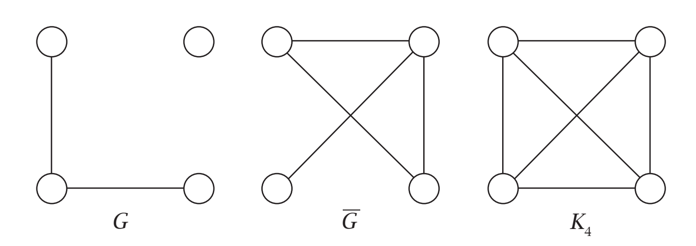
لا تكمن أهمية $K_{3,3}$ وK_5 في كونهما غير مستويتين فحسب، بل في حقيقة أن كل الشبكات تعتبر مستوية إلا إذا احتوت على نسخة من إحدى هاتين الشبكتين المحظورتين. هذه النظرية، التي يصعب وصفها بدقة وإثباتها، وضحها كوراتوفسكي عام ١٩٣٠. وقبل أن نتوغل في مناقشة الشبكات المستوية، سنتوقف قليلًا لتوضيح بعض جوانب الوضع العام.

نحن لا نحتاج إلا إلى أن نهتم بالشبكات التي لا تحتوي على حلقات أو أضلاع متعددة، وسوف نسمي هذه الشبكات «الشبكات البسيطة». والسبب في ذلك هو أنه إذا كانت الشبكة N مستوية فإن الشبكة البسيطة الأساسية التي نحصل عليها بحذف

جميع الحلقات ودمج أي أضلاع متعددة بين عُقدتين في ضلع واحد بينهما، تكون أيضًا مستوية. بالعكس إذا كانت الشبكة البسيطة الأساسية من الشبكة مستوية، فإنه يمكننا أن نستبدل بأي ضلع وحيد من الشبكة البسيطة الأساسية، العدد المطلوب من الأضلاع المتعددة وإضافة أي عدد من الحلقات نرغب فيه للصورة دون انتهاك للاستواء؛ لذلك إذا كانت الشبكة البسيطة الأساسية مستوية فإن الشبكة نفسها مستوية كذلك.

سبق أن قمنا بحل مسألة حول الشبكات البسيطة في الفصل السادس، حيث رأينا أنه في أي حفل يوجد على الأقل اثنان من الأفراد لهما نفس عدد الأصدقاء في الحفل. يمكننا إعادة صياغة هذا السؤال ليصبح عن الشبكات البسيطة: ارسم شبكة تحتوي على عُقدة واحدة لكل شخص واربط بين أي عُقدتين بضلع إذا كان ثمة علاقة صداقة بين الشخصين اللذين تمثلهما العقدتان. ما برهنته الحجة التي سقناها في الفصل السادس هو أنه في أي شبكة بسيطة يجب أن يكون هناك عُقدتان على الأقل لهما نفس الدرجة.

ثمة فكرة سوف يتكرر ظهورها عدة مرات فيما تبقى من هذا الفصل، وهي مكملة أي شبكة بسيطة G. لتكن G شبكة بسيطة حيث N ترمز لمجموعة العُقد الموجودة فيها. مكملة الشبكة G، التي يرمز إليها بالرمز $\overline{G}$، هي شبكة بسيطة لها نفس مجموعة العُقد مثل G، ولكن يوجد فيها عُقدتان يربط بينهما ضلع في $\overline{G}$، بينما لم يكن هناك ما يربطهما في G. ويترتب على ذلك إذا وضعنا G مع المكملة $\overline{G}$ فسنحصل على الشبكة الكاملة المشتملة على مجموعة العُقد N. بأخذ مكملة المكملة للشبكة G فإننا طبعًا نحصل على G مرة أخرى: $\overline{\overline{G}} = G$ (انظر شكل ١٠-٦).

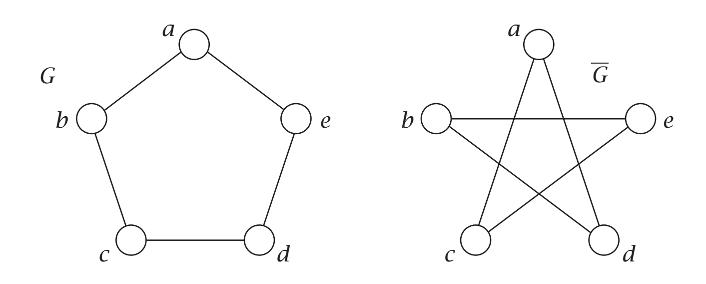


شكل ١٠-٦

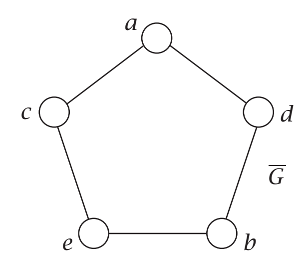
في المسألة الثامنة في الفصل السادس رأينا أنه في أي حفل يشارك فيه ستة أشخاص أو أكثر يوجد دائمًا مثلث من المعارف المشتركة أو مثلث من الأشخاص الذين لا يعرف أحدهم الآخر. هذه المسألة يمكن صياغتها أيضًا في سياق الشبكات والشبكات المكملة لها كشبكة المعارف وشبكة الغرباء وهما مكملتان إحداهما للأخرى: المعرفة المتبادلة يُرمز لها بالأضلاع الموجودة في G، في حين أن الأضلاع في $\overline{G}$ ترمز إلى عدم معرفة الشخصين أحدهما للآخر. ما تطلبه المسألة حقًّا هو إثبات أنه في أي شبكة بسيطة G تحتوي على ست عقد على الأقل، فإما أن تحتويَ G على نسخة من K_3 (أي مثلث من الأضلاع) أو تحتوي الشبكة المكملة لها $\overline{G}$ على هذه النسخة. ويمكن ملاحظة ذلك في المثال السابق حيث $\overline{G}$ تحتوي على المثلث المطلوب على الرغم من أن G لا تحتوي على مثل هذا المثلث. (بطبيعة الحال، من الممكن تمامًا أن تحتوي كلٌّ من G و$\overline{G}$ على مثلثات عديدة.)

ثمة مثال إرشادي ينشأ إذا ألقينا نظرة على الشبكة G على 5 عُقد يمكن رسمها على شكل خماسي منتظم. وهذه قد سبق أن قابلناها في الفصل السادس؛ إذ إنها عند التفكير فيها بوصفها تمثيلًا لخمسة ضيوف حول مائدة في حفل عشاء تقدم مثالًا على حفل ليس به ثلاثة أشخاص يعرف أحدهم الآخر ولا ثلاثة أشخاص لا يعرف أحدهم الآخر. الشكل الخماسي G لا يحتوي على أي مثلث. ومع ذلك إذا رسمنا $\overline{G}$ بالطريقة المعروفة فإن الصورة الناتجة لن تكون مفيدة (انظر شكل ١٠-٧). الشبكة $\overline{G}$ تبدو أكثر تعقيدًا من G؛ إذ إنها لا تبدو حتى مستوية حيث إن أضلاعها يمر بعضها ببعض في مواضع كثيرة. على أية حال، عند الفحص بدقة نجد أن $\overline{G}$ لها نفس تكوين الشبكة G ولا سيما أنها أيضًا تفتقر إلى المثلثات. لتوضيح ذلك لا تحتاج إلا لترتيب الطريقة التي ندرج بها العُقد حول خارج الشكل الخماسي: بدلًا من أن يكون الترتيب عكس عقارب الساعة a, b, c, d, e سنرتبها على النحو التالي a, c, e, b, d؛ ومن ثم تصبح صورة $\overline{G}$ الآن شكلًا خماسيًّا عاديًّا (وتصبح G على شكل النجمة)؛ انظر شكل ١٠-٨.

من ثم يتبيَّن لنا أن الشبكتين G و$\overline{G}$، رغم أنهما تمثلان عَلاقات مختلفة، فهما تتماثلان عند أخذ الهيكل الشبكي لكليهما في الاعتبار فحسب. علماء الرياضيات لديهم رأي في ذلك: نقول إن الشبكتين متماثلتان إذا أمكن تمثيلهما بنفس الصورة. وهذا يعني أن يوجد تناظر واحد إلى واحد بين عقد كلتا الشبكتين؛ بحيث إن أي عُقدتين تتجاوران في الشكل الأول (بمعنى أنهما ترتبطان بضلع واحد)، إذا — وفقط إذا — كانت العُقدتان المقابلتان لهما في الشكل الثاني هما أيضًا متجاورتان. وبصفة عامة، قد يكون من الصعب



شكل ١٠-٧



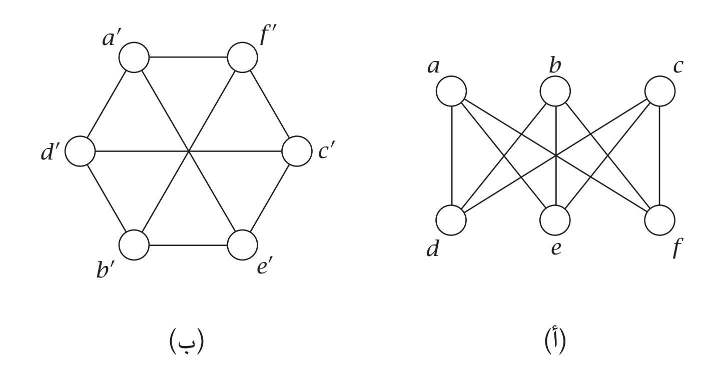
شكل ١٠-٨

معرفة ما إذا كانت الشبكتان متماثلتين أم لا. على سبيل المثال، الصورتان في شكل ١٠-٩ كلتاهما تمثل $K_{3,3}$. وفيما يلي التناظر المناسب بين العقد الذي يوضح ذلك:

$$a \longrightarrow a', b \longrightarrow b', \ldots$$

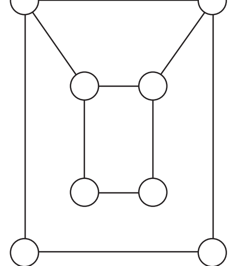
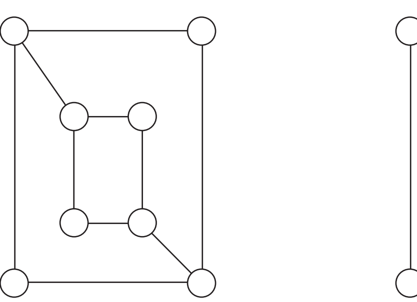
وأترك للقارئ التحقق من أن أي عقدتين ستكونان متجاورتين في الشبكة الأولى إذا — وفقط إذا — كانت نظيرتاهما متجاورتين في الشبكة الثانية.

يمكنك تخيُّل صعوبات التعامل مع الشبكات المُعقدة جدًّا. ومع ذلك فمن السهل أحيانًا اكتشاف أن شبكتين غير متماثلتين: ما عليك إلا أن تعثر على اختلاف أساسي بين الشبكتين. فمثلًا إذا كانت الشبكتان لا تحتويان على نفس العدد من العُقد أو نفس العدد من الأضلاع، فإنهما قطعًا غير متماثلتين. وقد يكون الاختلاف طفيفًا بدرجة أكبر. فيمكن أن نجد عُقدة لها الدرجة 4 متصلة بعُقدة لها الدرجة 6، في حين أن ذلك غير موجود في الشبكة الأخرى؛ فإذا كانت هذه هي الحالة فلن تكون الشبكتان متماثلتين.



شكل ١٠-٩

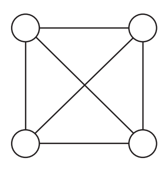
على سبيل المثال، أوجد اختلافًا أساسيًّا بين الشبكتين الموضحتين في شكل ١٠-١٠. كلتا الشبكتين تحتويان على عقدتين لهما الدرجة 3، ولكن في الشبكة الثانية هاتان العقدتان متجاورتان، وهي ليست الحالة في الشبكة الأولى، ولهذا السبب فمن غير الممكن تسمية العقد في الشبكتين $a, b, c, \ldots$ و $a', b', c', \ldots$ بطريقة تحترم التجاور. وعلى الرغم من ذلك، إذا كان لديك مثال لا يظهر فيه هذا الاختلاف في الهيكل الشبكي، فإن مسألة تحديد ما إذا كانت الشبكتان متماثلتين أم لا قد تصبح مسألة عويصة ومتعبة للغاية.

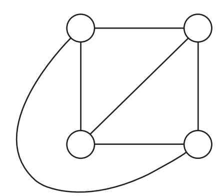



شكل ١٠-١٠

يمكننا الآن توضيح ما نعنيه بالاستواء. فالشبكة تكون مستويةً إذا أمكن تمثيلها بواسطة شبكة لا تتقاطع أضلاعها، ومن ثَم فهي على مستوًى واحد. فشبكة عدم معرفة

الضيوف بعضهم ببعض هي شبكة مستوية لأنها يمكن تمثيلها بشكل خماسي. بعبارة أخرى، كونُك رسمت صورةً مبدئيةً للشبكة وكانت هذه الصورة تحتوي على عدة أضلاع متقاطعة؛ لا يعني بالضرورة أن الشبكة غير مستوية. على سبيل المثال، الشبكة K_4 يمكن بطبيعة الحال رسمها كما في اليسار في شكل ١٠-١١، ولكن مع ذلك، يمكن بسهولة رؤيتها على أنها مستوية كما تبين صورتها البديلة الموجودة في اليمين.





شكل ١٠-١١

هناك صيغة خاصة تنطبق على الشبكات المستوية ويمكن استخدامها لتوضيح أن الشبكة ليست مستوية إذا كانت تحتوي على عدد كبير جدًّا من الأضلاع: وتؤدي هذه الصيغة بشكل خاص إلى تفسير لماذا تكون $K_{3,3}$ وK_5 غير مستويتين.

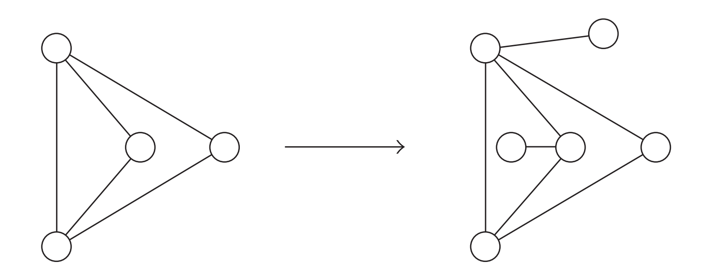
ثمة عددان يرافقان أي شبكة: العدد n، وهو عدد العُقد والعدد e، وهو عدد الأضلاع؛ ولكن بالنسبة للشبكات المستوية، يمكننا إرفاق عدد ثالث بها وهو f، وهو عدد أوجه الشكل المستوي، حيث الوجه هو المنطقة المحاطة بالأضلاع ولا تحتوي على أي منطقة أصغر محاطة بالأضلاع. ومن المناسب أن نعد السطح الخارجي للشبكة المستوية على أنه وجه آخر، مع أن هذا يختلف قليلًا عما سوف ننفذه. بالنسبة للنسخة المستوية من الشبكة K_4 السابقة، فنجد أن $n = 4$ و$e = 6$ و$f = 4$. ويعد f_4 هو وجهها الخارجي. من الواضح أنه، على الرغم من أن هذه الشبكة مرسومة، فإن العددين n وe سيظلان على حالهما، ولكن هذا ليس واضحًا جدًّا فيما يتعلق بالعدد f. ومع ذلك، فهو صحيح، لأنه في أي شبكة مستوية متصلة ترتبط الأعداد الثلاثة بعضها ببعض من خلال معادلة بسيطة للغاية:

$$n + f = e + 2. \qquad (10\text{–}1)$$

في نموذج الشبكة K_4 نرى أن هذه المعادلة متحققة: $4 + 4 = 6 + 2$. والسبب في استمرار هذه العلاقة في أي شبكة مستوية متصلة يمكن فهمه بتخيُّل أن ترسم الشبكة ضلعًا

تلو الآخر، مع إضافة أي عقد جديدة عند الضرورة، وملاحظة أن المجموعين على جانبي المعادلة دائمًا ما سيزيدان أو سيقلان معًا. عندما نرسم أول ضلع، سيكون لدينا شبكة مستوية حيث إن $n = 2$ و$e = 1$ و$f = 1$. (وجه واحد فقط غير محدود خارج الشبكة) ومن ثم تتحقق المعادلة. وكلما أضفنا المزيد من الأضلاع، ستوجد لدينا حالتان لفحصهما. نظرًا لأن الصورة النهائية مترابطة، فيمكن أن يتم تجميعها ضلعًا تلو الآخر دون الحاجة لرسم ضلع آخر غير مرتبط بأي عُقدة من العقد المرسومة من الأساس، على الرغم من أننا قد نحتاج لتقديم عُقدة واحدة جديدة عند رسم ضلع جديد. توجد حالتان:

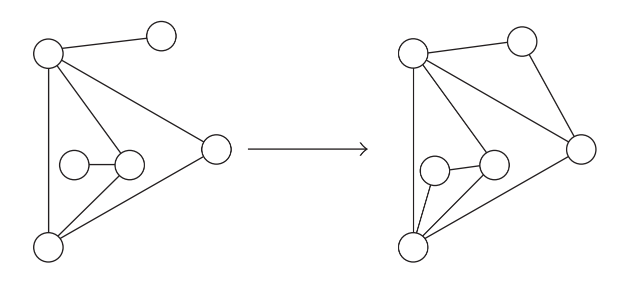
(١) يتم رسم ضلع مما يتطلب تقديم عُقدة جديدة لا تقع على ضلع موجود بالفعل، كما في شكل ١٠-١٢. في هذه الحالة يزيد كل من n وe بمقدار 1 لكل ضلع يتم إضافته؛ ومن ثم تظل المعادلة (10–1) موزونة: في الشبكة الأصلية تأخذ المعادلة (10–1) الشكل $2 + 5 = 3 + 4$ وتغيرت إلى $2 + 7 = 3 + 6$ للشبكة على اليمين التي تكونت بإضافة ضلعين جديدين من النوع السابق وصفه.



شكل ١٠-١٢

(٢) يتم رسم ضلع لا يتطلب أي عُقد جديدة (شكل ١٠-١٣). وهذا سيؤدي إلى زيادة e وf بمقدار 1؛ لأن الضلع الجديد سوف يَقسم الوجه الموجود (ربما يكون الوجه الخارجي) إلى اثنين. وهذا سوف يؤدي إلى إضافة 1 لكل طرَف من طرفَي المعادلة.

في المثال المبين في شكل ١٠-١٣ أُضيف ضلعان من هذا النوع؛ واحد منهما قَسم وجهًا داخليًّا إلى وجهين، بينما قسم الآخر الوجه الخارجي إلى اثنين. ومن ثم تحولت الصيغة (10–1) من $2 + 7 = 3 + 6$ إلى $2 + 9 = 5 + 6$، لكنها ما زالت موزونة.



شكل ١٠-١٣

هذا يحقق ما يسمى صيغة متعدد السطوح للشبكات المستوية. يمكننا الآن استغلال هذه الصلة بين n وf وe لتحديد بعض الخواص الاستثنائية التي تتمتع بها الشبكات المستوية.

لنفترض أن لدينا شبكة مستوية بسيطة متصلة، أي تشتمل على مكون به عدد f من الوجوه. لنسمِّ عدد الأضلاع التي تحيط بوجه باسم «عدد الوجه» الخاص بهذا الوجه ونرمز لهذه المتتابعة من الأعداد بـ $F_1, F_2, \ldots, F_f$. إذا جمعنا كل أعداد الوجه فإننا سنجمع كل ضلع مرتين على الأكثر، لأن كل ضلع يقع على حدود وجهين على الأكثر. (الضلع يمكن أن يكون على حدود وجه واحد فقط، كما يتضح من واحد من الأضلاع في شكل ١٠-١٣.) ومن ثم فإن مجموع أعداد الوجه لا يزيد على ضعف e، أي العدد الإجمالي لأضلاع الشبكة:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_f \leq 2e.$$

والآن لأي شبكة مستوية بسيطة تحتوي على ثلاثة أضلاع على الأقل، سيكون كل وجه محدودًا على الأقل بثلاثة أضلاع؛ لأننا كان من الممكن أن نجد وجهًا محدودًا بضلعين فقط إذا سمحنا بالأضلاع المتعددة، أما الوجه الذي يحيط به ضلع واحد، فهو الوجه المحاط بحلْقة، وكلاهما سمتان محظورتان في الشبكات البسيطة. بعبارة أخرى، كل «عدد وجه» يكون على الأقل 3، بحيث يكون:

$$\underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{f \text{ times}} \leq F_1 + F_2 + \cdots + F_f.$$

بجمع الحقيقتين السابقتين نحصل على:

$$3f \leq 2e \Longrightarrow f \leq \frac{2}{3}e.$$

بجمع هذه الصيغة مع صيغة متعدد السطوح رقم (1-10) نحصل على:

$$e + 2 = n + f \leq n + \frac{2}{3}e$$
$$\Longrightarrow e + 2 \leq n + \frac{2}{3}e \leq \frac{1}{3}e + 2 \leq n.$$

بعبارة أخرى، بضرب الطرفين في 3، نجد أنه في أي شبكة مستوية بسيطة متصلة تتكون من أكثر من عُقدتين:

$$e \leq 3n - 6.$$

وهذا ينفي كون الشبكة K_5 تدخل في نطاق الشبكات المستوية لأنها تحتوي على عدد كبير من الأضلاع: بالنسبة للشبكة K_5 نجد أن $e = 10$ و$n = 5$؛ ومن ثم فإن e أكبر من $3n - 6 = 9$.

ومع ذلك، فإن الشبكة $K_{3,3}$ هربت لحظيًّا من هذا الشرك، حيث إن $e = 9$ و$n = 6$ ومن ثم فإن القاعدة $e \leq 3n - 6 = n$ متَّبعة في $K_{3,3}$. ولكنها، مع ذلك، سوف تستسلم للحجة التالية المشابهة لما قرأناه حالًا. نظرًا لأن أضلاع $K_{3,3}$ دائمًا ما تربط بين مجموعتين من ثلاث عُقد (انظر شكل ١٠-٩)؛ ومن ثم فإن أي دائرةٍ في الشبكة يجب أن يكون طولها عددًا زوجيًّا: على الأخص لا توجد مثلثات؛ ومن ثم فإنه في أي تمثيل مستوٍ للشبكة $K_{3,3}$، إذا أمكن وجود مثل هذا التمثيل، فإن كل وجه لا بدَّ أن يحيط به أربعة أضلاع على الأقل. وهذا يعطينا جملة أقوى من ذي قبل: وهي $4f \leq 2e$؛ أي إن $f \leq \frac{e}{2}$. وبجمع هذه الجملة مع صيغة متعدد السطوح رقم (1-10) يتضح أنه في أي تمثيل مستوٍ للشبكة $K_{3,3}$ لا بدَّ أن يكون:

$$n + \frac{e}{2} \geq e + 2 \Longrightarrow \frac{e}{2} \leq n - 2 \Longrightarrow e \leq 2n - 4.$$

إلا أن الشبكة $K_{3,3}$ لا تستطيع تخطي هذه العقبة، لأن $e = 9$، وهذا أكبر من $2\times6-4 = 8$.

تعتبر صيغة متعدد السطوح حقيقة أساسية جدًّا من حقائق الرياضيات. وقد سمحت لنا بإثبات أنه لا يمكن رسم K_5 ولا $K_{3,3}$ دون أن يتقاطع ضلعان على الأقل. والسبب في أنها سميت بهذا الاسم هو أنها تنطبق على متعدد السطوح، أي على الأشكال المصمتة المحاطة بأسطح مستوية متعددة الأضلاع، شريطة أن تكون محدبة، أي إن الأوجه المضلعة تلتقي عند زوايا أقل من الزاوية المستقيمة، مثل متعدد الأسطح المنتظم الذي شاهدناه في الفصل السابق. فمثلًا في المجسم ذي الاثني عشر سطحًا يوجد 20 ركنًا $n = 20$، و30 ضلعًا $e = 30$، و12 وجهًا $f = 12$؛ ومن ثم تنطبق عليه الصيغة $n + f = e + 2$. ويمكنك التحقق من أن المجسمات الأربعة المنتظمة الأخرى تنطبق عليها هذه الصيغة أيضًا.

إذا وافقنا على صيغة متعدد السطوح، فإن من السهل بما يكفي توضيح أنه من الممكن الإجابة عن سؤال من نوعية السؤال الذي طُرح عند ختام الفصل السابق: هل من الممكن أن يكون هناك مجسم منتظم آخر يحتوي على خمسة مثلثات متساوية الأضلاع تلتقي عند كل ركن، ولكنه يحتوي على عدد من الأضلاع والأوجه، مختلف عن المجسم ذي العشرين وجهًا؟ الإجابة بالتأكيد لا، لأن صيغة متعدد السطوح لن تنطبق عليه. لنفترض أن لدينا مثل هذا المجسم المنتظم حيث عدد أركانه n وعدد أضلاعه e وعدد وجوهه f. عند عدِّ كل الأضلاع عند كل ركن سنجد $5n$، ولأن هذا يعد كل ضلع مرتين نجد أن $5n = 2e$. بالمثل عند عد الأضلاع بمعرفة الوجوه سنجد أنه بما أن كل وجه له ثلاثة أضلاع وكل ضلع يقع على وجهين، فإن $3f = 2e$. عند ضرب صيغة متعدد السطوح في $3 \times 5 = 15$ سنحصل على:

$$15n + 15f = 15e + 30 \Longrightarrow 6e + 10e = 15e + 30.$$

مما سبق نستنتج أن e يجب أن تساوي 30؛ ومن ثم فإن $n = \frac{2}{5}e = 12$ و$f = \frac{2}{3}e = 20$ ولا توجد قيم أخرى ممكنة.

(٣) الحفلات والجماعات الأكبر

نعود الآن إلى نوع المسائل الذي قدمناه لأول مرة في الفصل السادس. ما مدى الكبر الذي يجب أن تكون عليه الحفلة حتى نتأكد من وجود مجموعة من أربعة أصدقاء مشتركين

أو أربعة أشخاص لا يعرف أحدهم الآخر؟ بالرجوع إلى لغة الشبكات، سيكون السؤال هو: كم عدد العقد الذي يجب وجوده في شبكة بسيطة G حتى نتأكد أن G أو $\overline{G}$ تحتوي على نسخة من K_4؟ وقد ثبت أن هذا العدد هو 18 في الحقيقة. ولن أستطيع إثبات هذا هنا. ولكن ما يمكنني إثباته، على أية حال، هو أن العدد موجود وسوف أقدم حجة لإثبات أنه ليس أكثر من 63. هذا قد يبدو غير مثير للإعجاب، لكن تذكر أنه ليس من الواضح أن العدد لا بدَّ أن يوجد من الأساس. وستجد الحُجة المقدمة مهمة للغاية وهي الأساس لبرهان نظرية رامزي المطبقة على مجموعات أكثر عمومية من تلك التي نفحصها؛ كما أن لها تفسيرات مفيدة في الحالات التي تنطوي على مجموعات غير منتهية. بشكل خاص يمكن تعميم الحُجة التي أقدمها هنا لتثبت أن أعداد رامزي موجودة دائمًا، بمعنى أنه: «لأي عدد n مُعطًى يوجد عدد N بحيث إن الشبكة البسيطة التي تحتوي على عدد N من العقد أو الشبكة المكملة لها تحتوي على نسخة من K_n داخلها.» في الفصل السادس، في السؤال الثامن رأينا أنه إذا كانت $n = 3$ فإن $N = 6$ وهي الحالة الأولى الجديرة بالاهتمام. سوف أثبت الآن أنه إذا كانت $n = 4$ فإن قيمة N لن تكون أكبر من 63.

من الأسهل اعتبار شبكة G والمكملة لها متراكبتين، مما يُكوِّن نسخة من شبكة كاملة. لوِّن الأضلاع بالأبيض أو الأسود تبعًا لكون الضلع موجودًا في G أم في $\overline{G}$ المكملة لها. ما سوف أثبته هو أنه بفرض أن الشبكة تحتوي على 63 عُقدة، فإنها يجب أن تحتوي على نسخة وحيدة اللون من K_4، بمعنى أنه توجد مجموعة من أربع عُقد بحيث تكون الأضلاع الموصلة بين هذه العُقد كلها باللون الأبيض أو أنها كلها باللون الأسود.

لنفترض إذن أن شبكتنا هذه (أو الحفل إذا شئت) تحتوي على الأقل على:

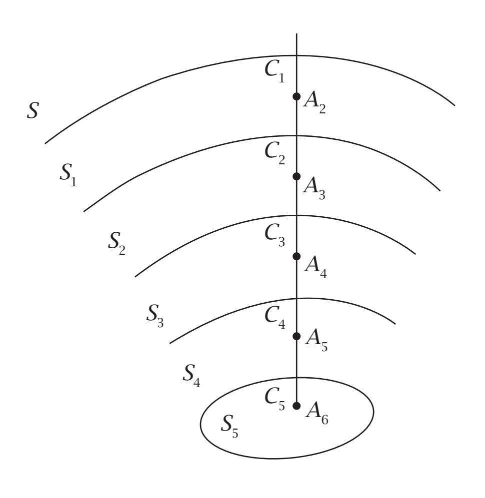
$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 \text{ nodes.}$$

إذا كنت تتذكر صيغة المتسلسلة الهندسية من أول مسألة في الفصل الأول، فسوف ترى أن هذا العدد هو $2^6 - 1 = 63$. (العدد ليس مهمًّا فعلًا فيما يأتي: فقد جرى اختياره، كما سترى، للتأكد من أن لدينا عددًا كبيرًا كافيًا من العُقد لتنفيذ الإجراء التالي.) قم بالتركيز على إحدى العُقد — ولتكن العقدة A_1 — واستمر كما يلي (انظر شكل ١٠-١٤). من كل الأضلاع الخارجة من A_1 (يوجد على الأقل 62 منها طبعًا، لأننا نستخدم الشبكة

الكاملة)، سيكون نصفها على الأقل من لون واحد، وليكن C_1. (C_1 إما أن يكون أبيض أو أسود.) افحص جميع العُقد المتصلة بالعُقدة A_1 بضلع ملوَّن باللون C_1، وارمز إلى هذه المجموعة من العقد بالرمز S_1. هناك ما لا يقل عن:

$$\frac{1}{2}\left(2+2^2+2^3+2^4+2^5\right)=1+2+2^2+2^3+2^4=31$$

من هذه العقد. فلتختر منها واحدة ولتطلق عليها A_2.



شكل ١٠-١٤

على الأقل نصف الأضلاع الخارجة من A_2 ومؤدية إلى عُقد أخرى في S_1 كلها من لون واحد، ولنسمِّ هذا اللون C_2 (وقد يكون هو نفسه C_1 أو يكون مختلفًا عنه). ولتكن S_2 هي مجموعة هذه العُقد. جدير بالذكر أن S_2 محتواة بالكامل في S_1 وهي نفسها تحتوي على الأقل على:

$$\frac{1}{2}\left(2+2^2+2^3+2^4\right)=1+2+2^2+2^3=15$$

عنصرًا. اختر عنصرًا جديدًا A_3 من S_2.

نقوم بهذه العملية خمس مرات، فنحصل على العُقد A_1 وA_2 و… وA_6 وزمرة من المجموعات:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.$$

كل مجموعة منها محتواة في التي تسبقها كما في شكل ١٠-١٤. العدد المبدئي للعُقد جرى اختياره ليضمن القيام بهذه العملية على الأقل 5 مرات، والمجموعات S_3 وS_4 وS_5 ستحتوي على الأقل على عددٍ من العناصر 7 و3 و1 على الترتيب. كيف يساعد كل ذلك؟ نحن الآن بحاجة إلى ملحوظة دقيقة للإجابة عن السؤال. وتحتوي الفقرة التالية على الفكرة الرئيسية، لكنها تتطلب بعض التفكير.

افحص قائمة العُقد A_1 وA_2 وA_3 وA_4 وA_5. انظر إلى أي عنصر في هذه القائمة، وليكن A_3 مثلًا. كل الأضلاع الخارجة من A_3 إلى عناصر المجموعة S_3 لها نفس اللون. والآن A_4 وA_5 وA_6 جميعها في S_3؛ ومن ثم فإن كل الأضلاع الخارجة من A_3 إلى عناصر القائمة التي تتلو A_3 لها نفس اللون. هذه الحجة تنطبق على A_1 إلى A_5، فكل واحدة من هذه العقد A_i يقترن بها لون معين C_i، هو نفسه لون الأضلاع التي تخرج منها إلى جميع عناصر القائمة التالية لها. والآن لا يوجد سوى لونين متاحين الأبيض والأسود، وعلى ذلك فعلى الأقل ثلاثة من A_1 و… وA_5 تقترن بنفس اللون (وليكن الأبيض مثلًا). اختر هذه المجموعة المكونة من ثلاثة عناصر بالإضافة إلى A_6: والآن كل ضلع بين هذه العقد الأربعة يجب أن يكون أبيض اللون؛ ومن ثم نكون قد أوجدنا نسختنا أحادية اللون من K_4، أو إذا شئت مجموعتنا المكونة من أربعة أصدقاء مشتركين.

(٤) الآلات واللغات

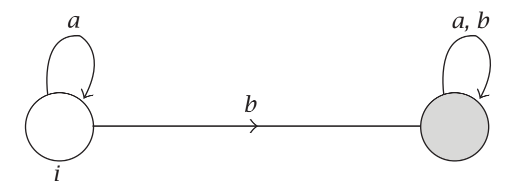
ينطوي موضوعنا الأخير على النظر إلى الشبكات من منظور مختلف تمامًا: ننظر إليها على أنها آلات. المكون الرئيسي للأوتوميتون (الآلات ذاتية التشغيل) هو عبارة عن شبكة يطلق على العقد المكونة لها اسم «أوضاع». ومن بين هذه العُقد يوجد «الوضع المبدئي» وعدد من «أوضاع القبول». (قد يوجد أكثر من وضع قبول، والوضع المبدئي نفسه يمكن أن يكون وضع قبول.) وتكون الآلة ذاتية التشغيل أو الأوتوميتون $\mathcal{A}$ في أي وقت في أحد الأوضاع، ويمكن تفعيلها من خلال «مُدخل» ما، يرمز له بحرف من مجموعة حروف تعرف بـ «الأبجدية»؛ وهذا الحرف يرسل الأوتوميتون من وضع إلى آخر. وبعد أن تؤثر سلسلة من

الحروف (تسمى كلمة) w على الأوتوميتون $\mathcal{A}$، فسوف تكون الأوتوميتون إما في وضع قبول أو لا، حيث تأخذ سلسلة الحروف المكونة لـ w الأوتوميتون عبر سلسلة من الأوضاع. نقول إن الكلمة w مقبولة من الأوتوميتون، أو تم التعرف عليها من الأوتوميتون، إذا ما جعلت الأوتوميتون في وضع قبول. أما إذا لم تفعل، فإنها تكون مرفوضة، ونقول إن هذه الكلمة ليست جزءًا من اللغة التي تتعرف عليها الأوتوميتون.

إذا شئت الانغماس في التشبيه بمصطلحات بشرية، يمكنك التفكير في أوضاع $\mathcal{A}$ على أنها أمزجة، بحيث تكون أوضاع القَبول ممثلة للمزاج الجيد للأوتوميتون، أما الأوضاع الأخرى فهي بمثابة مزاجها السيئ. فهي تستيقظ في مزاجها المبدئي (الذي قد يكون جيدًا أو سيئًا، بناءً على شخصية الأوتوميتون الفردية) وتؤثر عليها المدخلات التي تتعرض لها إما بجعلها في مزاج جيد أو سيئ. فإذا انتهى بها الأمر في مزاج جيد، فعندئذٍ قد قبلت الكلمة، ولكن إذا جعلتها الكلمة في مزاج سيئ، فإنها ترفضها.

على سبيل المثال، لنأخذ أبجدية بسيطة $\mathcal{A} = \{a, b\}$. ستكون هذه الأبجدية كافية دائمًا لأغراضنا، بل إن الحرفين يكفيان لتوضيح معظم النظريات. في الأشكال ١٠-١٥ إلى ١٠-١٧ يطلق على الوضع المبدئي i وأوضاع القبول مظللة. وتشير الأسهم على الأضلاع إلى كيفية تغيير الحرف للأوتوميتون من وضع إلى آخر.

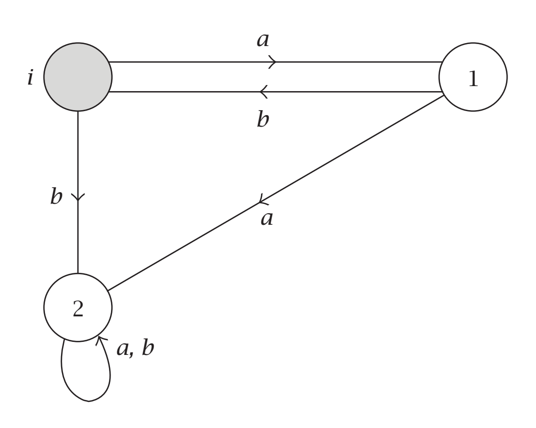
الأوتوميتون الموضحة في شكل ١٠-١٥ تتعرف على الكلمة شريطة أن تحتويَ على حرف b واحد على الأقل. فالكلمة المكونة من حروف a فقط لا تنقل الأوتوميتون من وضعها المبدئي أبدًا. عند رؤية الأوتوميتون للحرف b فإنها تكون سعيدة وتظل في مزاجها الجيد (وضع القبول) أيًّا كان ما تراه بعد ذلك.



شكل ١٠-١٥

الآلة التالية ليس من السهل إسعادها (شكل ١٠-١٦). فهي ستتعرف على الكلمة فقط إذا تكونت من سلسلة من الحروف ab حتى الكلمة الفارغة (سلسلة من عدد صفر

من ab). على سبيل المثال، الكلمة $abababa$ ستنقل الآلة من الوضع المبدئي (وهو أيضًا وضع القبول الوحيد) للوضع 1 ثم تعود مرة أخرى إلى الوضع المبدئي i أربع مرات. وبما أن السلسلة السابقة تجعل الآلة تنتهي عند وضع القبول، إذن فهي تتعرف على هذه الكلمة. ومع ذلك، بمجرد أن تكتشف أنها لا تحتوي على سلسلة من الحروف ab فإنها تنتقل إلى وضع «التجاهل» 2، الذي لا تتزحزح منه أبدًا. هذا سوف يحدث إذا بدأت الكلمة بالحرف b، أو إذا كانت الكلمة بها حرفان متتاليان متطابقان. أيٌّ من هذين الحدثين كافٍ للإساءة للآلة لأنها ستكتشف أن الكلمة المُدخلة لها ليست في لغتها، وبعد ذلك ستفقد الاهتمام كلية بكل ما يُدخل.

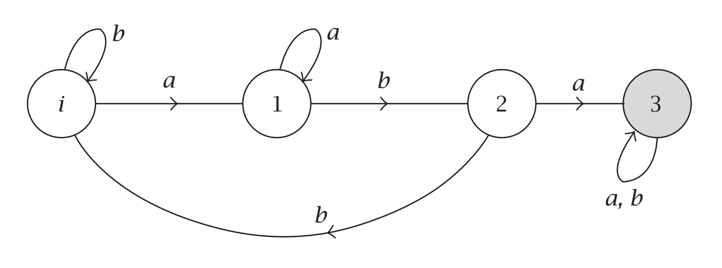


شكل ١٠-١٦

كمثال ثالث، أوجد اللغة المقبولة للأوتوميتون الصغيرة الموضحة في شكل ١٠-١٧. هذه الآلة تقبل الكلمة إذا — وفقط إذا — احتوت على المعامل aba، على سبيل المثال، الكلمة $baabaa$ تُقبل بينما $abba$ لا تُقبل. في الحقيقة هذه أصغر أوتوميتون يمكن تصميمها لقبول هذه اللغة الخاصة.

تعد نظرية الأوتوميتون أو الآلات ذاتية التشغيل من النظريات الهائلة ولها نظرية جبرية خاصة بها، وهي تشكل جزءًا من موضوع يُعرف باسم «النظرية الجبرية لأشباه المجموعات». وهناك العديد من التطبيقات في نظريات علوم الكمبيوتر وهذه النظرية نفسها شديدة الروعة. فمثلًا لأي لغة معترف بها L يوجد دائمًا أوتوميتون وحيدة وهي

الصغرى التي تتعرف على اللغة L. وتعتبر فئة اللغات المعترف بها نفسها قادرة على عدد من الخصائص المتميزة، بعضها يقود إلى الفئة التي تظهر بشكل طبيعي في أماكن غير متوقعة.



شكل ١٠-١٧

بالنسبة لمن يرغب من القراء في التجريب، يمكنك أن تحاول رسم أوتوميتون تتعرف على اللغات التالية: (١) الكلمات التي تحتوي على ba كعامل؛ (٢) الكلمات التي تحتوي على كلا الحرفين a وb؛ (٣) الكلمات التي تنتهي بالحرف a. ويمكنك أن تختار ما تشاء، ولكن يجب أن تنتبه إلى أن الكثير من اللغات البسيطة الموصوفة لا يتم التعرف عليها. على سبيل المثال، اللغة المكونة من كل الكلمات التي تقرأ من اليمين ومن اليسار (مثل كلمة radar وminim)، ليست لغة لأي أوتوميتون: إذا كانت $\mathcal{A}$ تتعرف على جميع الكلمات التي تُقرأ من اليمين ومن اليسار، فإنه يمكن إثبات أنها من الضروري أن تتعرف على بعض الكلمات الأخرى التي لا تُقرأ من اليمين ومن اليسار.

سوف أختم هذا ببرهان لمثل هذه اللغة غير المعترف بها وتسمح لنا باستخدام مبدأ برج الحمام الذي قدمناه في السؤال رقم (٧) من الفصل السادس. المثال هو اللغة L المكونة من كل الكلمات على الصورة a^nb^n، أي جميع الكلمات ab و$aabb$ و$aaabbb$ و... (موجز القول أن مثل هذه الأوتوميتون لا يمكن الاعتداد بها، أو على الأقل أنها تكون مقيدةً بعدد الأشياء التي يمكنها وضعها في أزواج.)

لنفترض أن $\mathcal{A}$ هي الأوتوميتون التي تتعرف على جميع الكلمات في اللغة السابقة L. وهذا ممكن جدًّا، ولكني سوف أبين أن $\mathcal{A}$ ستكون مجبرة على التعرف على كلمات ليست من هذا النوع؛ ومن ثم فإن اللغة المقترنة بالأوتوميتون $\mathcal{A}$ ليست هي L ولكنها مجموعات أكبر من الكلمات.

لكل عدد n الكلمة a^n سوف تأخذ $\mathcal{A}$ من وضعها المبدئي i إلى وضع آخر سوف نطلق عليه s_n. بما أن a^nb^n مقبولة من قبل $\mathcal{A}$، فإن الكلمة b^n تأخذ $\mathcal{A}$ من الوضع s_n إلى وضع قبول آخر يطلق عليه c. الآن بما أن $\mathcal{A}$ لديها عدد محدود من الأوضاع ولكن هناك عددًا لا نهائيًّا من الأعداد n، ينتج عن ذلك أنه لا بدَّ من وجود عددين مختلفين، m وn مثلًا، بحيث يكون الوضعان s_m وs_n متطابقين بالرغم من اختلاف m وn.

في ضوء ذلك، انظر إلى الكلمة a^mb^n غير الموجودة في اللغة L لأن $m \neq n$. هذه الكلمة، رغم ذلك، يتم التعرف عليها بواسطة الأوتوميتون $\mathcal{A}$ لأن a^m تأخذ $\mathcal{A}$ من الوضع المبدئي i إلى $s_m = s_n$، ثم b^n تأخذ $\mathcal{A}$ من الوضع s_n إلى وضع القبول المساوي له c كما سبق.


هنداوي